

Transport de sédiment : approche stochastique

Christophe Ancey & Joris Heyman

11 septembre 2013

Plan de l'exposé

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

- Motivation : quel rôle pour les fluctuations de q_s ?
- Modèle markovien de mort/naissance
- Généralisation à un écoulement 1D
- Observations expérimentales

Introduction

● Fluctuations dans les rivières

- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

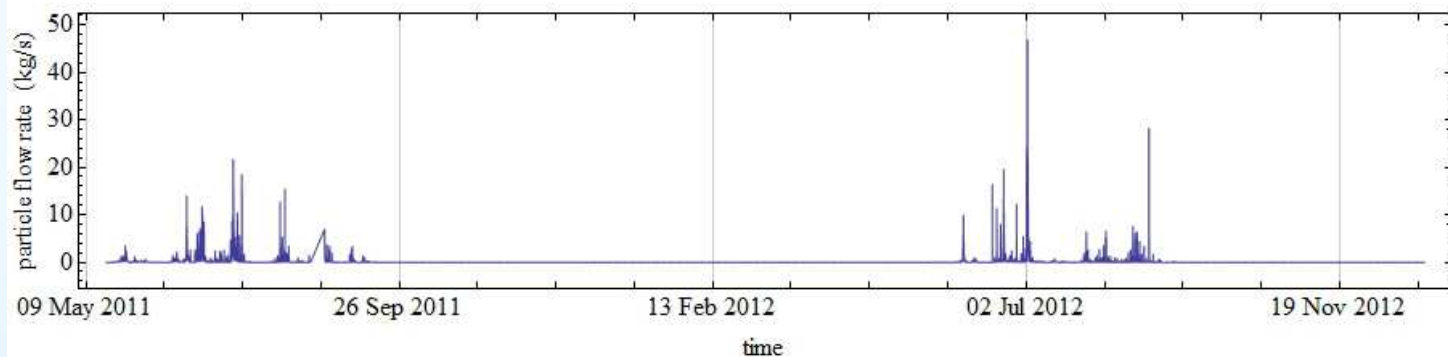
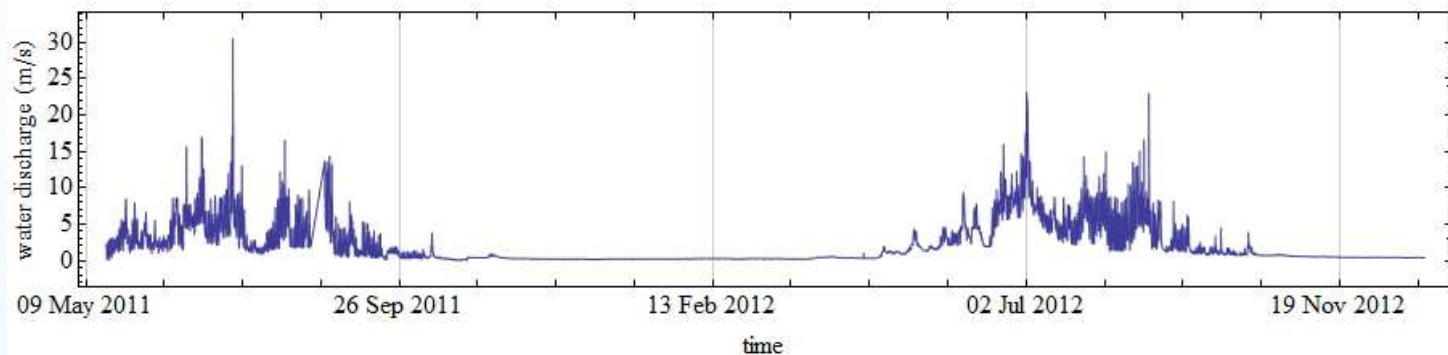
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Fluctuations dans les rivières



Mesures *in situ* sur la Navisence (Valais, CH), pente 2 % (mesure par géophones)

Courtoisie du CREALP (Dr Eric Bardou)

Introduction

- **Fluctuations dans les rivières**
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

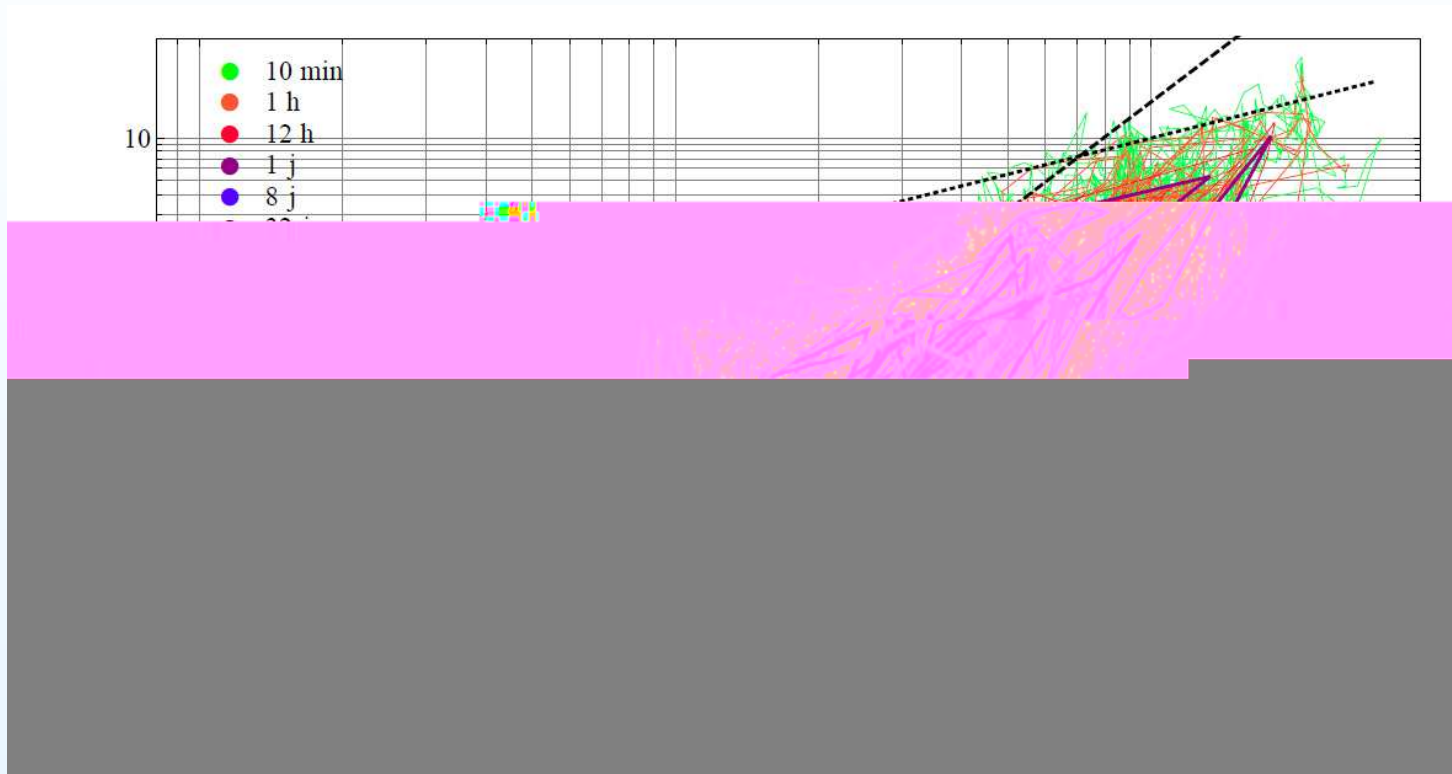
Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Analyse de la relation entre Q_s et Q_l selon le pas de temps considéré pour la moyenne

La droite en tiretés représente la courbe de tendance $Q_s \propto Q_l^3$ tandis que la droite en pointillés représente la courbe de tendance linéaire $Q_s \propto Q_l$.

Introduction

- Fluctuations dans les rivières

- **Expériences en laboratoire**

- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

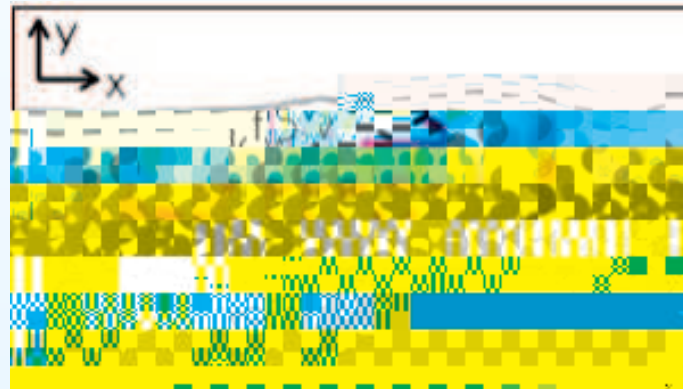
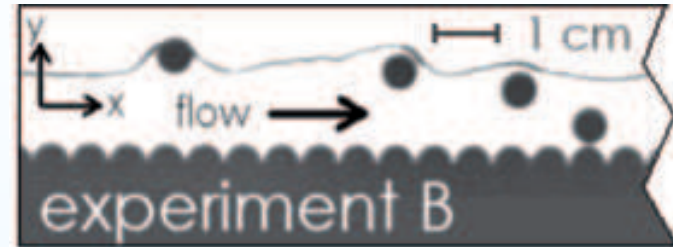
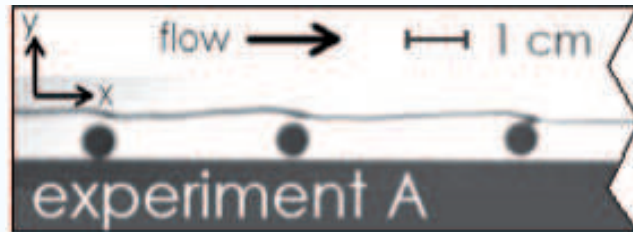
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Expériences en laboratoire



Expérience A : lit plat bed. Expérience B : lit avec rugosité.
Expérience C : lit mobile.

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- **Expériences en laboratoire**
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

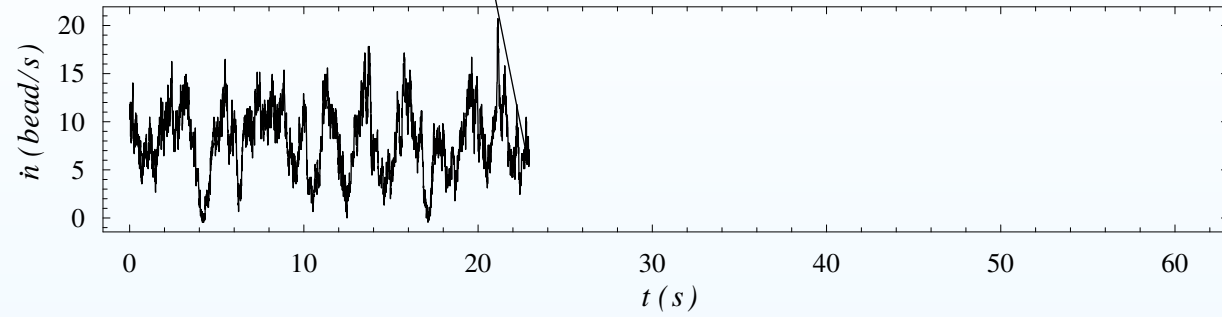
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

(a)



Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- **Quelques déductions**
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

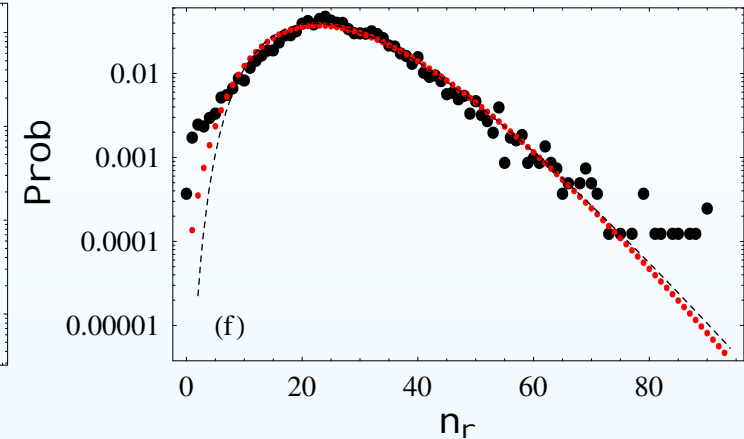
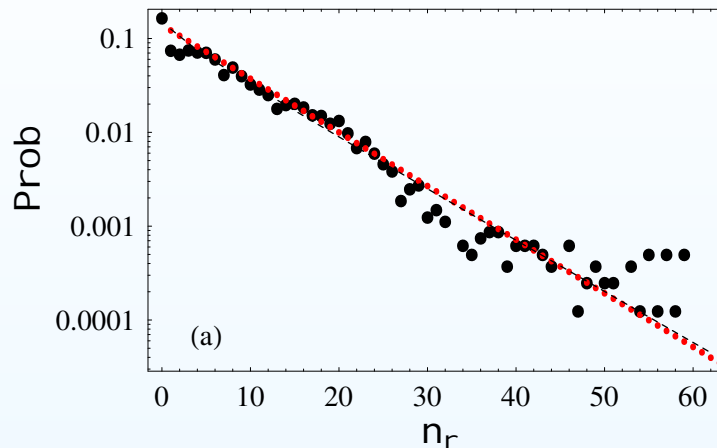
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Quelques déductions



distribution de probabilité (ddp) du nombre de particules (à faible et fort débits liquides) → loi binomiale négative plutôt qu'une distribution binomiale (théorie d'Einstein)

- variance $>$ moyenne → grandes fluctuations
- temps d'auto-corrélation long

→ Est-ce que cela joue un rôle à l'échelle macroscopique ?

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- **Modèles morphodynamiques**
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Modèles morphodynamiques

Équations de Saint-Venant + Exner

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial x} + gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho}, \quad (2)$$

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial y_b}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} = D - E, \quad (3)$$

Couplage non linéaire entre θ , y_b , \bar{q}_s , et τ_b

Analyse de stabilité linéaire : inconditionnellement stable (voir

Charru 2011, Balmforth & Provenzalle 2001)

\bar{q}_s : débit solide moyen par unité de largeur [m^2/s], \bar{v} vitesse moyenne de l'eau, h hauteur d'eau, E et D taux d'érosion et de déposition, y_b côte du lit, ζ_b porosité du lit, $\tan \theta = \partial_x y_b$ pente locale du lit, ρ masse volumique de l'eau, τ_b résistance à l'écoulement

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- **Quelle forme pour Exner ?**

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Quelle forme pour Exner ?

- Jerolmack & Mohrig (WRR 2005)

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial y_b}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} + \xi,$$

ξ bruit blanc

- Furbish et al. (JGR 2012)

$$\bar{q}_s = \overline{u_s \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\kappa \gamma}}{\partial x}$$

κ diffusivité des particules, γ activité particulaire (nb de particules en mouvement par unité de surface)

- Lajeunesse et al. (JGR 2010)

$$\ell_{sat} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} = q_{sat} - \bar{q}_s$$

ℓ_{sat} longueur de saturation, q_{sat} débit de saturation



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRA

- Principes du modèle
- **Comment définir le débit solide ?**
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Comment définir le débit solide ?

Une définition naturelle : un flux de particules à travers une surface de contrôle

$$q_s = \int_S \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{k} dS, \quad (4)$$

difficile à appliquer pour des particules (discrètes). Une définition probabiliste

$$\langle q_s \rangle = \int_S \int_{\mathbb{R}^2} P[\mathbf{u}_p \mid \mathbf{x}, t] \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{k} |d\mathbf{x}| d\mathbf{u}_p.$$

D'autres formes

- équilibre entre déposition et érosion (Einstein) : $q_s = El_s$;
- définition à partir du mouvement de « traceurs » (Ferguson, Wong & Parker) : $q_s = U_p L_a$;
- définition à partir de la trajectoire des particules (Furbish et al.) : $\bar{q}_s = \overline{u_s \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\kappa \gamma}}{\partial x}$;
- d'autres définitions encore (Wiberg, Ballio & Nikora, etc.).

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?

- **Notre définition du débit solide**

- Éléments du modèle
- Formulation markovienne

- Solution en régime permanent

- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Notre définition du débit solide

Une définition locale (débit volumique par unité de largeur)

$$q_s(x, t; \mathcal{V}; \bar{v}, h) = N \frac{\varpi_p}{\Delta x} \mathcal{U}_n = \gamma \mathcal{U}_n = \frac{\varpi_p}{\Delta x} \sum_{i=1}^N u_{p,i},$$

ou bien (débit = nombre de particules par unité de temps)

$$\dot{n} = \frac{N}{\Delta x} \mathcal{U}_n$$

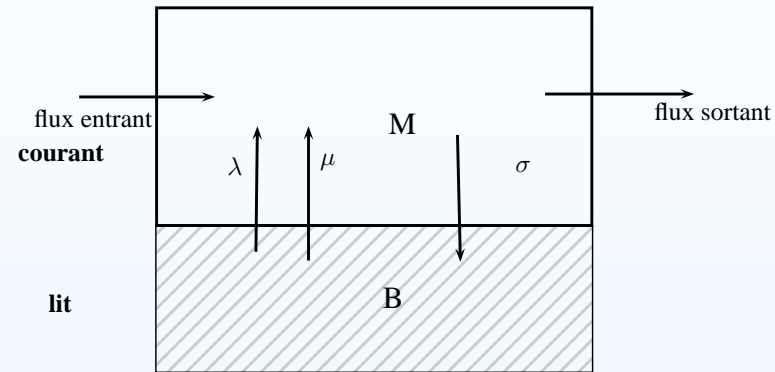
- N nombre de particules en mouvement dans le volume de contrôle ;
- $\gamma = N\varpi_p/\Delta x$: « activité particulaire » (Furbish) ;
- $\varpi_p = 4\pi d^3/(24B)$ volume d'une particule par unité de largeur du lit (écoulement 1D) ;
- $\mathcal{U}_n = \sum_{i=1}^N u_{p,i}/N$ moyenne arithmétique de la vitesse.

Deux variables clés : la vitesse moyenne des particules et le nombre de particules en mouvement.

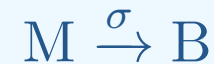
- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- **Éléments du modèle**
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Éléments du modèle

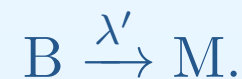
Faire un bilan de l'évolution des particules sur un volume de contrôle



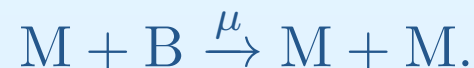
Déposition de particules



Entraînement d'une particule par le courant



Entraînement par effect collectif



- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- **Formulation markovienne**
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Formulation markovienne

Pour l'entraînement

$$P(n \rightarrow n+1, \Delta t) = \lambda' \Delta t + o(\Delta t), \quad P(n \rightarrow n+1, \Delta t) = \mu n \Delta t + o(\Delta t)$$

Pour la déposition

$$P(n \rightarrow n-1, \Delta t) = n \sigma \Delta t + o(\Delta t).$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov pour des variables discrètes

$$P(n, t + \Delta t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P(n+i, t) P(n+i \rightarrow n, \Delta t),$$

permet d'obtenir l'équation maîtresse dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n, t) &= (n+1)\sigma P(n+1, t) + (\lambda' + (n-1)\mu) P(n-1, t) \\ &\quad - (\lambda' + n(\sigma + \mu)) P(n, t), \end{aligned}$$

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide

- Éléments du modèle
- Formulation markovienne

● **Solution en régime permanent**

- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Solution en régime permanent

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n; t),$$

permet de transformer l'équation maîtresse en « simple » EDP hyperbolique

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) = L_z[G]$$

avec l'opérateur linéaire

$$L_z[G] = \lambda'(z - 1) + \{ \sigma + \mu z^2 - (\mu + \sigma)z \} \frac{\partial}{\partial z} G.$$

Une équation que l'on peut résoudre à la main

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- **Solution pour $\mu > 0$**
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Solution pour $\mu > 0$

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t \mid N_0 = n) = \frac{\sigma - \mu}{(C\mu - \mu)z + \sigma - C\mu}^{n + \lambda'/\mu} \frac{(C\sigma - \mu)z + \sigma(1 - C)}{\sigma - \mu}^n$$

C'est la fonction génératrice de la *distribution binomiale négative*

$$P_s(n) = \text{NegBin}(n; r_{nb}, p) = \frac{\Gamma(r_{nb} + n)}{\Gamma(r_{nb})n!} p^{r_{nb}} (1-p)^n, n = 0, 1, \dots,$$

avec $r_{nb} = \lambda'/\mu$ and $p = 1 - \mu/\sigma$, et Γ la fonction gamma. La moyenne est

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda'}{\sigma - \mu},$$

et la variance vaut

$$e =$$

$$\approx 2 4707.48795$$

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- **Solution pour $\mu = 0$**
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Solution pour $\mu = 0$

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t \mid N_0 = n) = [1 - C(1 - z)]^n \exp \left[\frac{\lambda'}{\sigma} (z - 1 + C(1 - z)) \right]$$

C'est la fonction génératrice de la *distribution de Poisson*

$$P_s(n) = \frac{(r_p)^n}{n!} e^{-r_p}, \quad n = 0, 1, \dots$$

avec $r_p = \lambda' / \sigma$. La moyenne et la variance sont égales (à r_p).

On retrouve le modèle d'Einstein : chaque particule a un mouvement sporadique décrit par un processus de Bernoulli. La somme de N processus de Bernoulli est un processus binomial. La loi binomiale tend vers la loi de Poisson quand $n \rightarrow \infty$ tout en gardant np constant.

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide

- Éléments du modèle
- Formulation markovienne

- Solution en régime permanent

- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$

- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

La loi binomiale négative est une loi de Poisson dont le taux serait aléatoire et distribué selon une loi gamma

$$P_s(n) = \int_a \frac{e^{-a} a^n}{n!} \text{Ga}(a; \alpha, \beta) da$$

$$= \text{NegBin}(n, r_{nb}, p) \quad (5)$$

$$= \frac{\Gamma[r_{nb} + n]}{\Gamma[r_{nb}]} p^{r_{nb}} (1 - p)^n \quad (6)$$

avec $\alpha = r_{nb} = \lambda' / \mu$ et $\beta = 1/p - 1 = \mu / (\sigma - \mu)$

Représentation de Poisson...

$$P(n, t) = \int_c \frac{e^{-a} a^n}{n!} f(a, t) da,$$

ou comment passer de variables discrètes à des variables continues



Représentation de Poisson

On montre (avec un peu de math) que l'on peut passer de l'équation

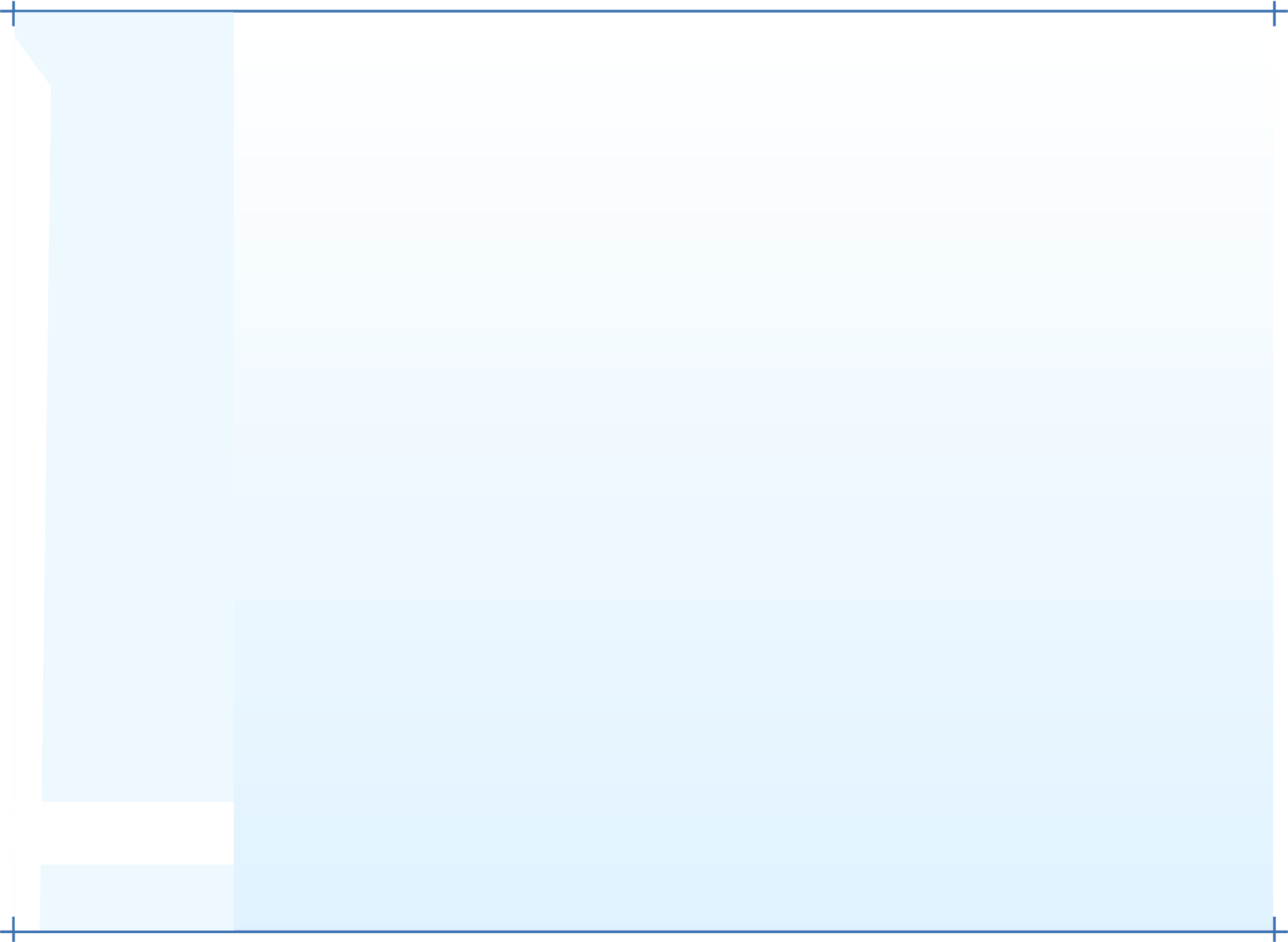
$$\frac{\partial G}{\partial t} = L_z[G] \text{ avec } G(z, t) = \{K(z, a), f(a, t)\},$$

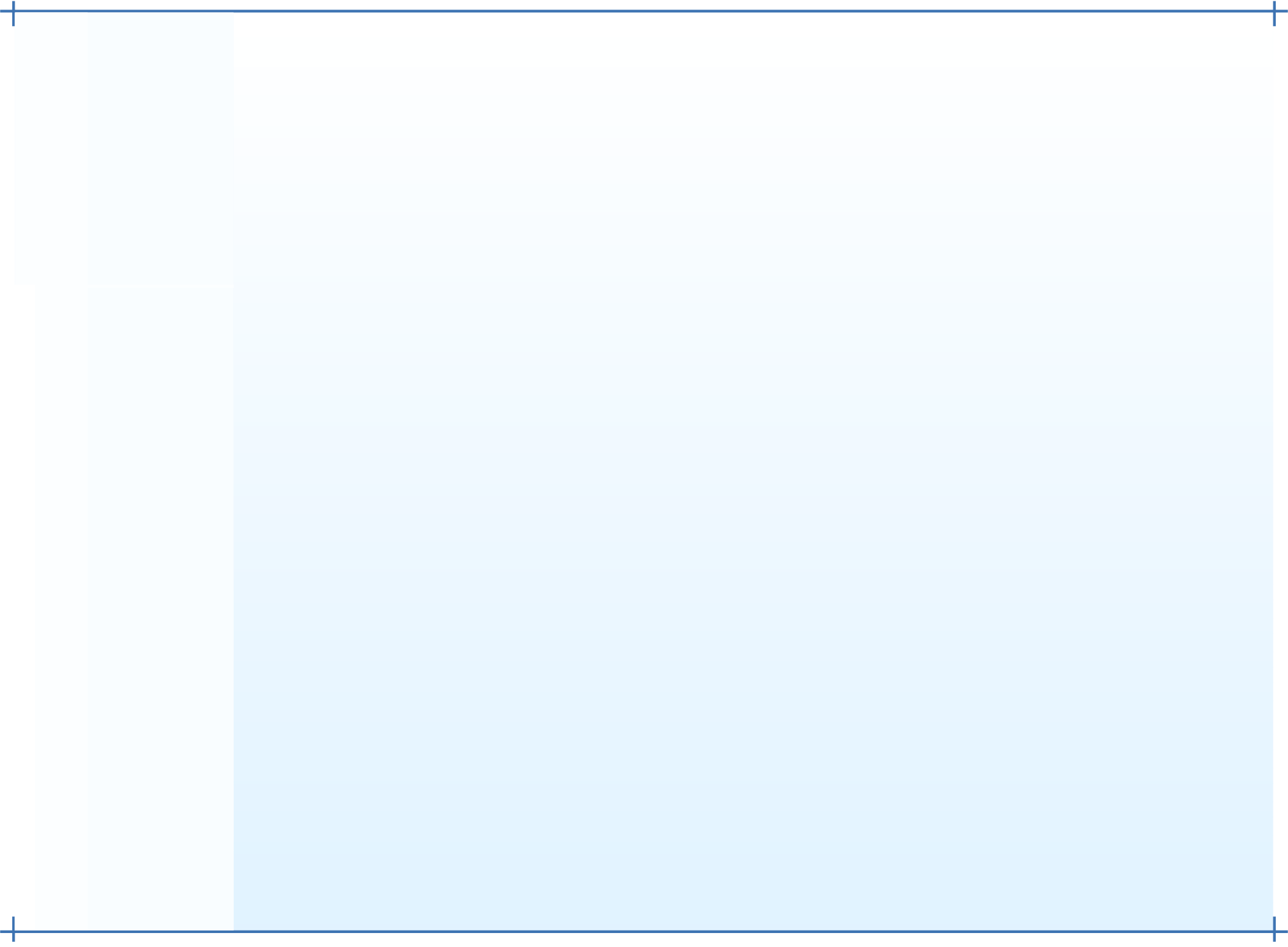
avec $K(z, a) = \exp[a(z - 1)]$ la fonction « noyau » de Laplace, à une équation parabolique non linéaire du second ordre

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 a f}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a} [(\lambda' - a(\sigma - \mu)) f].$$

Avantages :

- une équation que l'on peut interpréter comme une équation de Fokker-Planck ;
- une équation bien connue des mathématiciens (processus de Feller, 1950)...
- comme des économistes (modèle CIR, Cox-Irgensoll-Ross, des taux d'intérêt, 1985).





Fluctuations de vitesse

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin

● Fluctuations de vitesse

- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Analogie avec le mouvement brownien

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= U, \\ t_r \frac{dU}{dt} &= -(U - \bar{u}_s) + \sqrt{2D_u} \xi(t),\end{aligned}$$

où X est l'abscisse du centre de masse, U sa vitesse, t_r un temps de relaxation, D_u est l'équivalent d'une diffusivité, $\xi(t)$ est le terme de bruit blanc. Ce système est équivalent à l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\hat{P}) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{P} \frac{u - \bar{u}_s}{t_r} \right) + \frac{1}{t_r^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (D_u \hat{P}).$$

avec $\hat{P}(x, u, t)$ la densité de probabilité (lagrangienne) du couple (x, u) au temps t . À l'équilibre, on a

$$P_u^{eq}(u) = \sqrt{\frac{2t_r}{\pi D_u}} \frac{1}{1 + \operatorname{erf}(\bar{u}_s \sqrt{t_r} / \sqrt{2D_u})} \exp\left(-\frac{t_r(u - \bar{u}_s)^2}{2D_u}\right),$$

Introduction

Modèle à une cellule

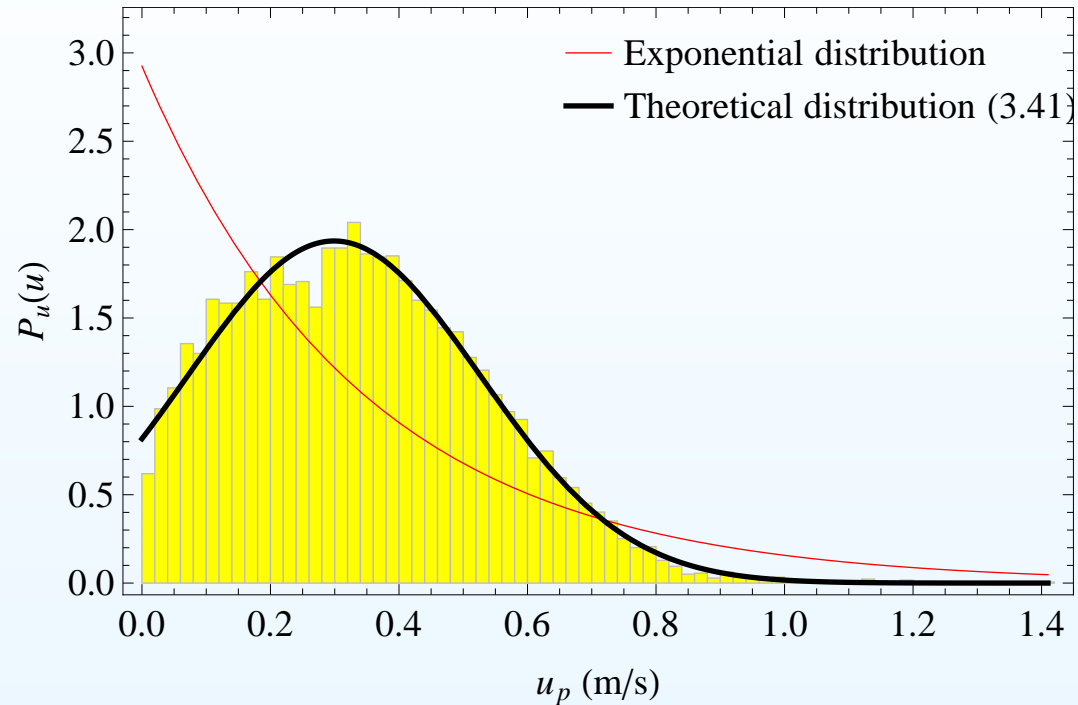
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- **Fluctuations de vitesse**
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densité de probabilité pour la vitesse d'une particule. Histogramme : densité de probabilité empirique de u_p . Courbe en gras : distribution théorique avec $\bar{u}_s = 29,9 \text{ cm s}^{-1}$ et $\zeta = 5,7$. Courbe fine : densité de probabilité de la loi exponentielle $P_u(u) = e^{-u/\bar{u}_s} / \bar{u}_s$, still with $\bar{u}_s = 29,9 \text{ cm s}^{-1}$. Calcul sur 755 trajectoires, pente du canal $1,6^\circ$, écoulement supercritique (Froude de 2,1) et turbulent (Reynolds voisin de 18 000).

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- **Calcul du débit**
- Comparaison avec les expériences

Calcul du débit

Par définition

$$\dot{n}(t; \mathcal{V}) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{N(t)} U_{p,i},$$

ce qui conduit à

$$P_{\dot{n}}(\dot{n}) = P_s(0)\delta(\dot{n}) + \frac{\zeta \Delta x}{\bar{u}_s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} P_s(k) \frac{\exp\left[-\zeta^2 \frac{(\dot{n}\Delta x - k\bar{u}_s)^2}{2k\bar{u}_s^2}\right]}{\sqrt{k}(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{k}\zeta/\sqrt{2}))}.$$

Il existe des approximations pour $\zeta > 2$

$$\langle \dot{n}(t; \mathcal{V}) \rangle \approx \frac{1}{\Delta x} \langle N \rangle \langle u \rangle_{eq.} = \frac{\bar{u}_s}{\Delta x} \frac{\lambda'}{\sigma - \mu} F_{eq.}(\zeta),$$

Introduction

Modèle à une cellule

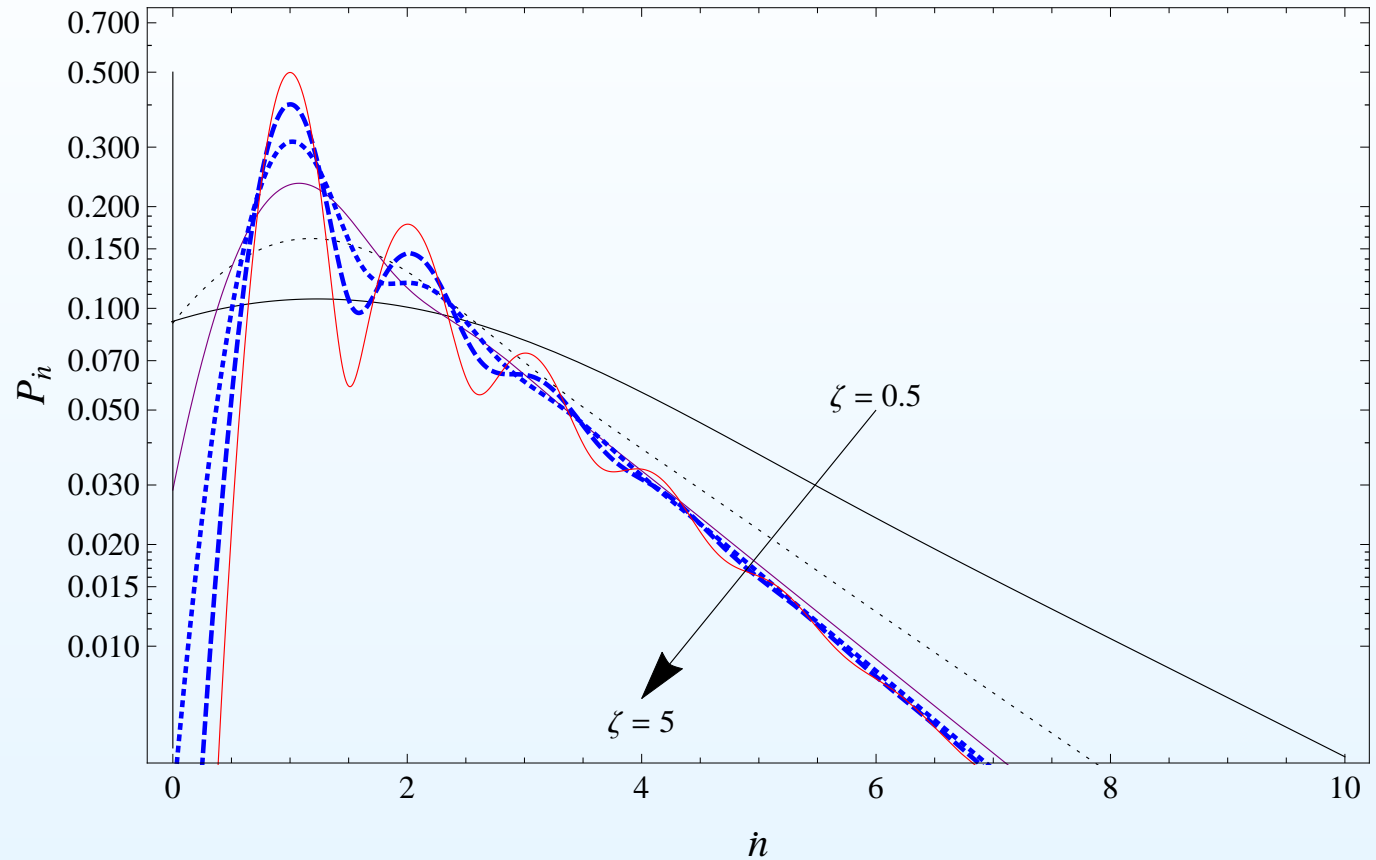
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densité de probabilité du débit solide $P_{\dot{n}}(\dot{n})$ en fonction de $\zeta = \bar{u}_s / \sqrt{D_u / t_r}$

Introduction

Modèle à une cellule

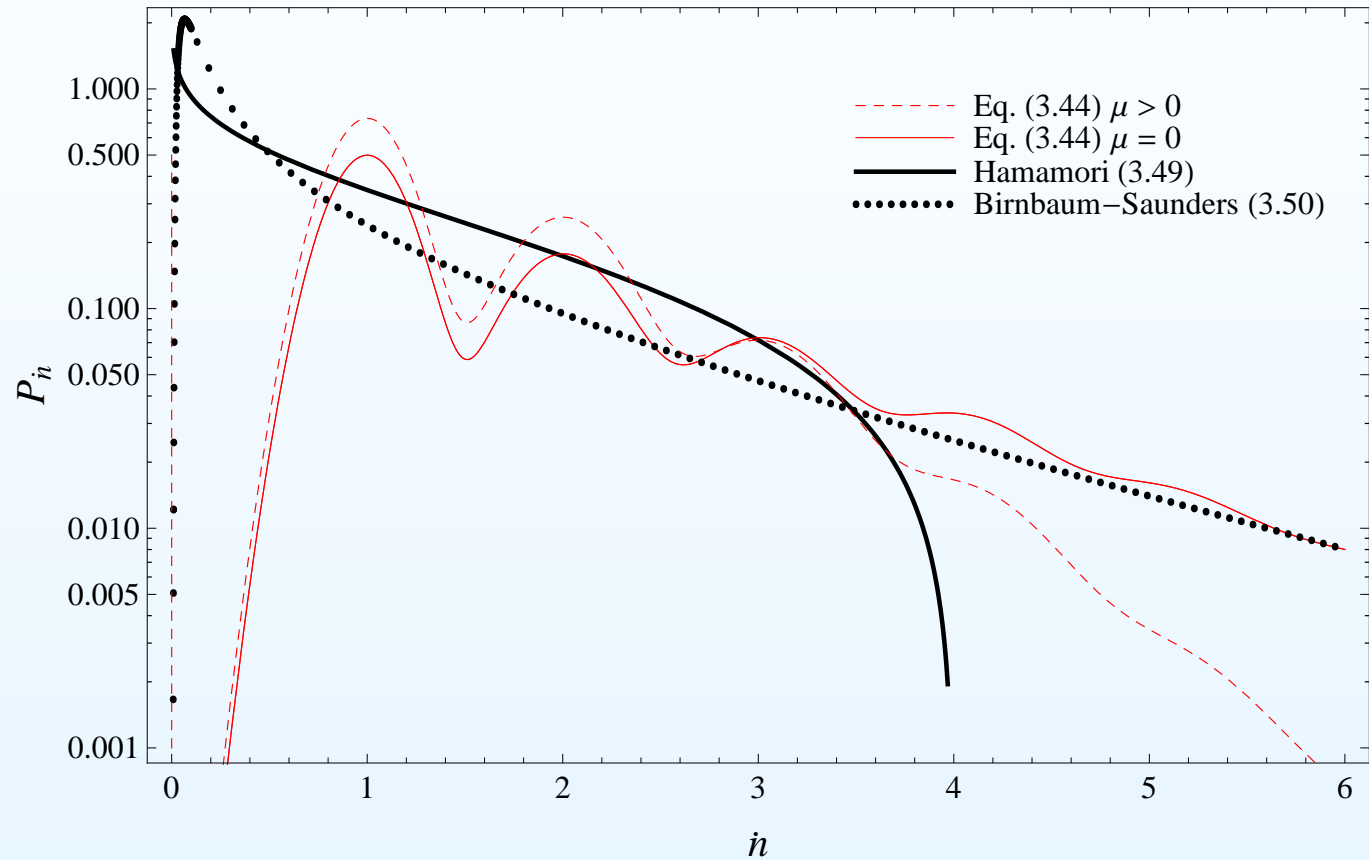
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Comparaison des densités de probabilité du débit solide $P_{\dot{n}}(\dot{n})$, notamment loi de Hamamori (1962) et Birnbaum-Saunders (Turowski WRR 2010)

Comparaison avec les expériences

Introduction

Modèle à une cellule

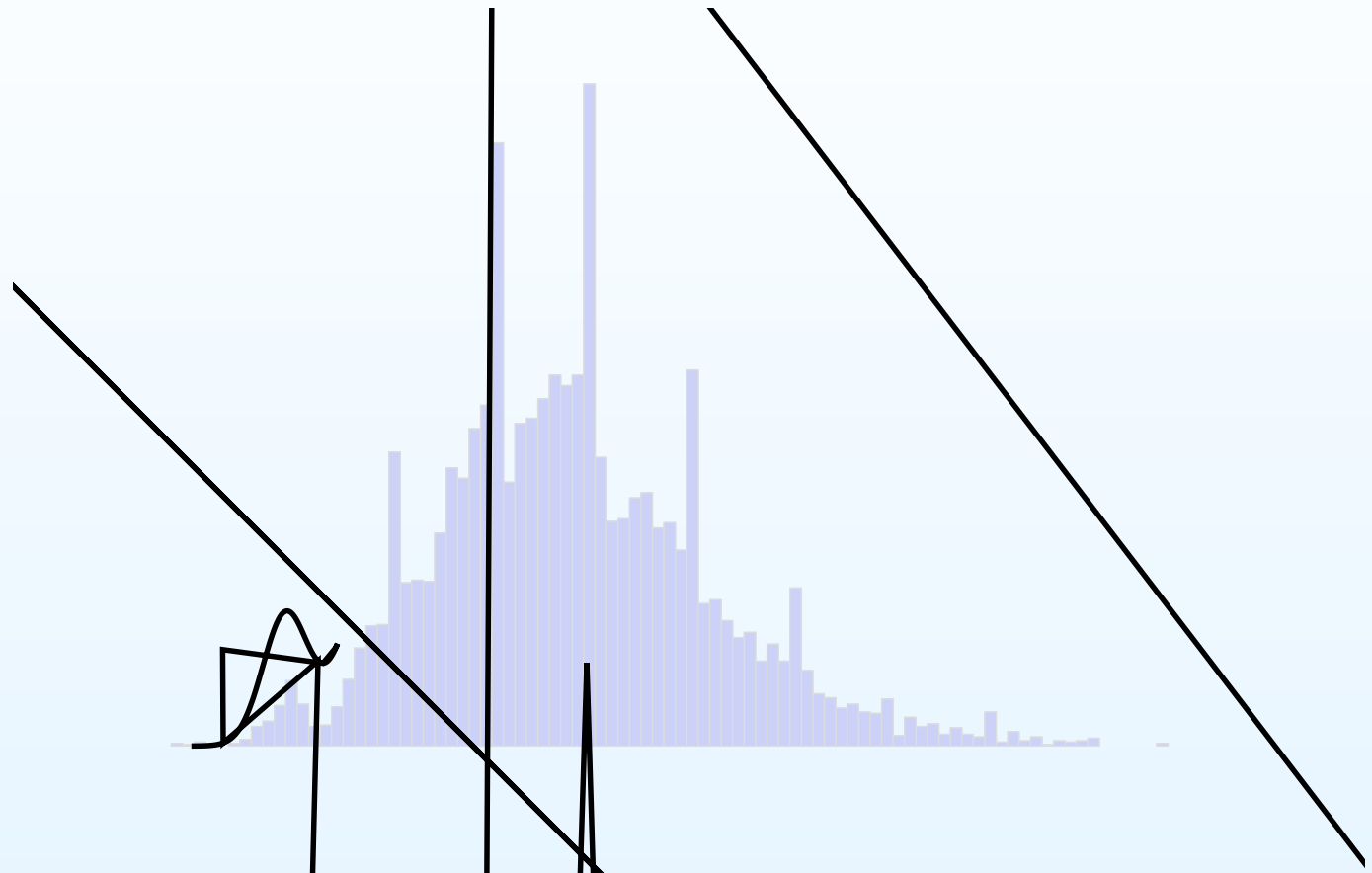
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

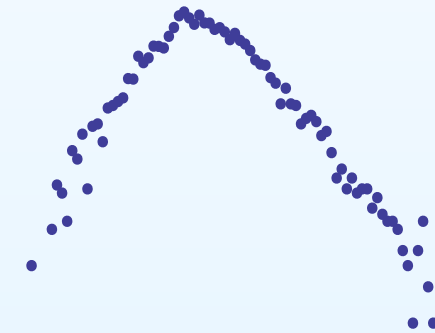
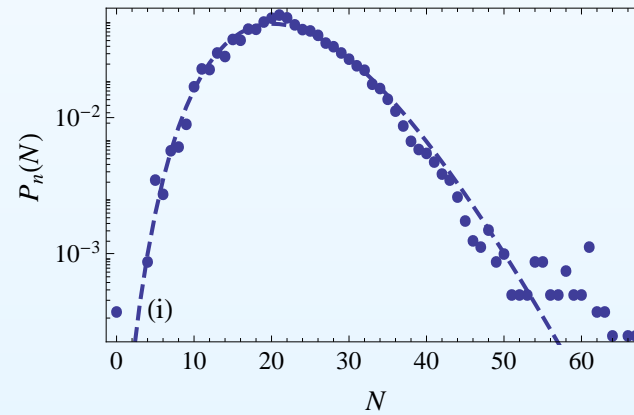
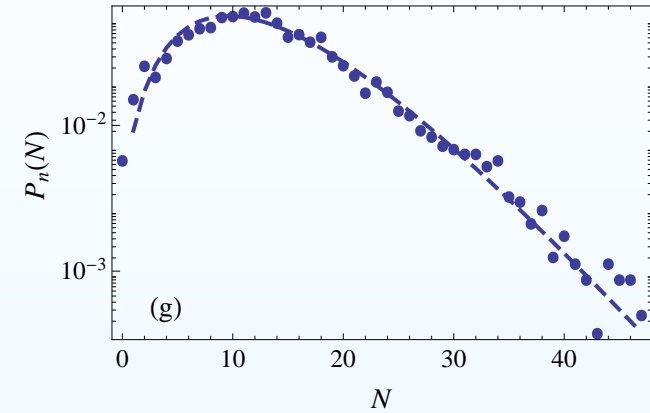
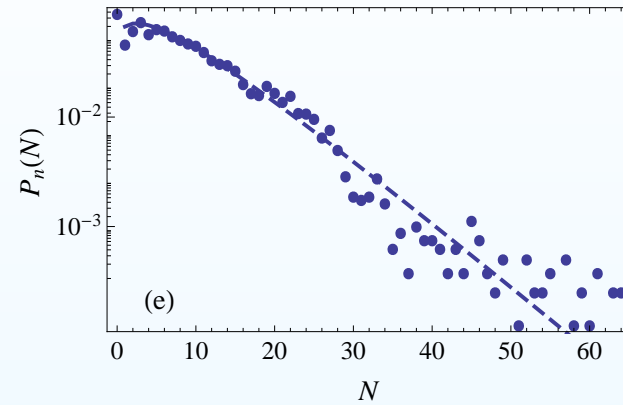
- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse

- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements





€

Équations moyennées

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

● Équations moyennées

● Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$

● Quelques propriétés de l'équations

d'advection diffusion

● Advection-diffusion à

l'échelle locale

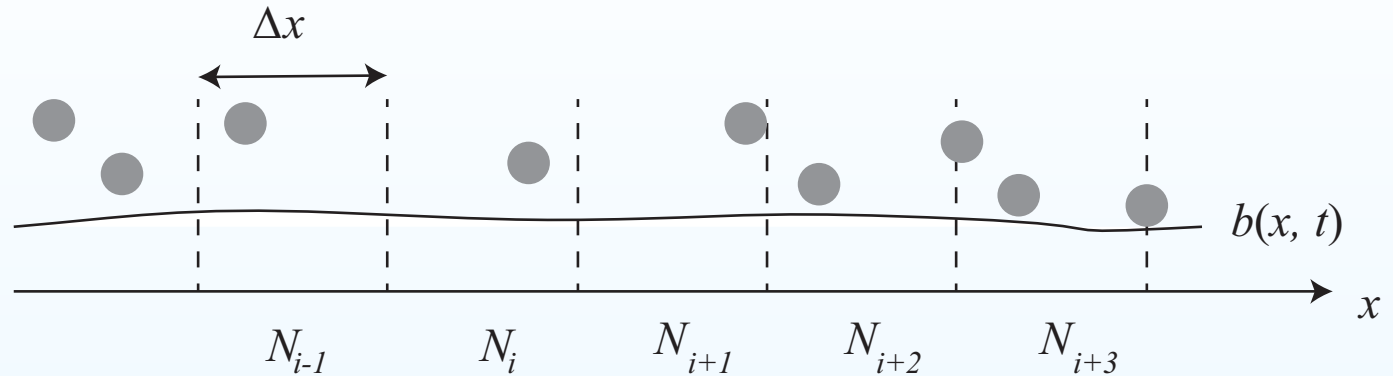
● Fluctuations stochastiques

● Équation maîtresse

● Équation de Fokker-Planck

Conclusions

Remerciements



Calcul du nombre de particules distribué dans un réseau de cellules adjacentes de même taille.

$$N(t; \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} dx P_x(x, t),$$

avec $P_x(x, t)dx$ la probabilité de trouver le centre de masse $\mathbf{x} = (x, y)$ d'une particule dans une tranche de fluide $[x, x + dx]$. Cette probabilité $P_x(x, t)$ est la densité de probabilité marginale eulérienne $P(x, u, t)$: $P_x(x, t) = \int_u P(x, u, t) du$.

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- **Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion**
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion

Mise sous forme adimensionnelle

$$\text{Pe} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \langle \tilde{\gamma}^* \rangle + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \langle \tilde{\gamma}^* \rangle \right) = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \langle \tilde{\gamma}^* \rangle - R^2 \langle \tilde{\gamma}^* \rangle,$$

avec le nombre Péclet comme rapport entre un temps de diffusion $t_d = \Delta x^2 / D_u$ et un temps d'advection $t_a = \Delta x / \bar{u}_s$:

$$\text{Pe} = \frac{t_d}{t_a} = \frac{\bar{u}_s \Delta x}{D_u}.$$

et un rapport entre la longueur du volume de contrôle et la longueur d'auto-corrélation $\ell_c = \sqrt{D_u / \kappa}$

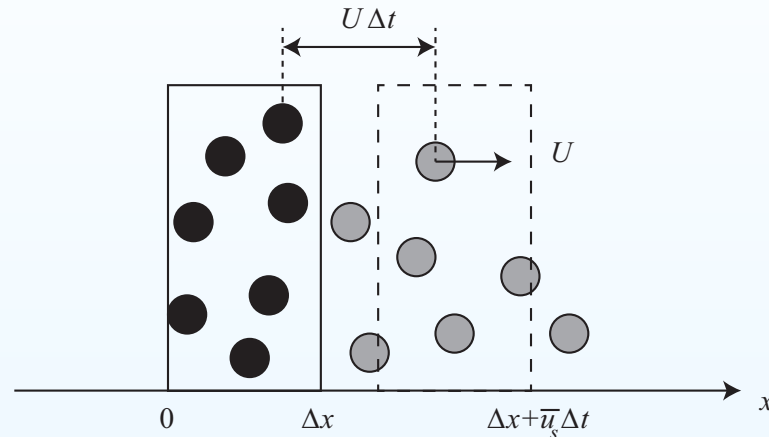
$$R = \frac{\Delta x}{\ell_c}.$$



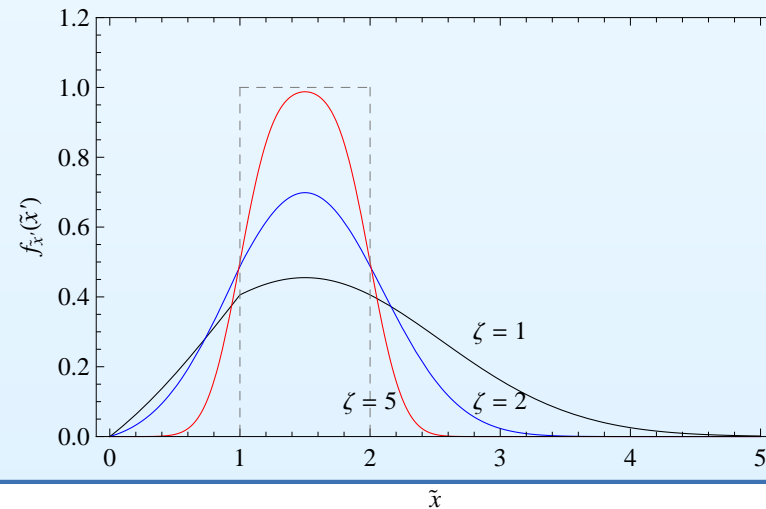
- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- **Advection-diffusion à l'échelle locale**
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

Advection-diffusion à l'échelle locale

On considère un nuage de particules, advecté à la vitesse moyenne \bar{u}_s

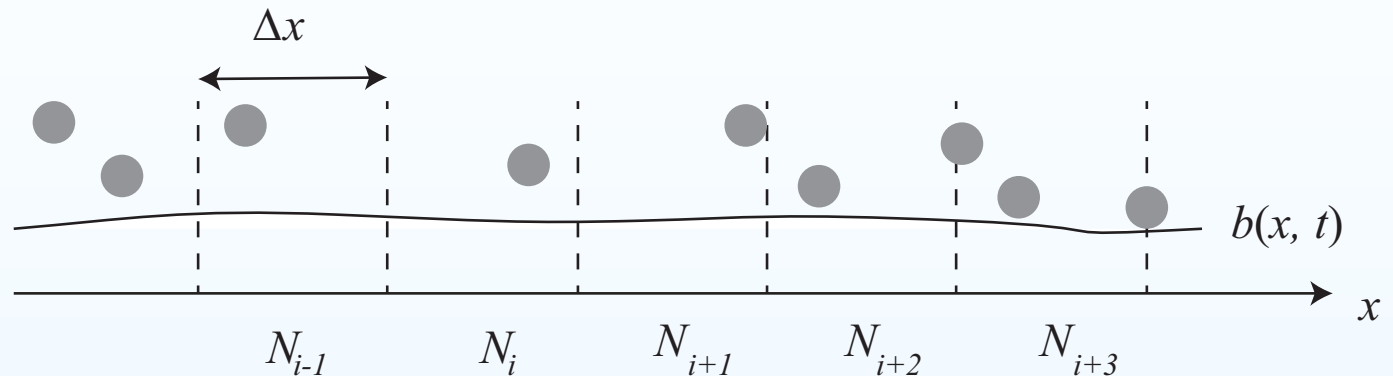


Pour certaines valeurs de $\zeta = \bar{u}_s / \sqrt{D_u / t_r}$, le déplacement relatif x' est assimilable à de la diffusion



- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- **Fluctuations stochastiques**
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

Fluctuations stochastiques



Probabilité de transfert par diffusion d'une cellule à l'autre (en ignorant l'advection)

$$N_i \xrightarrow{d_i} N_{i+1} \text{ and } N_i \xrightarrow{d_i} N_{i-1},$$

avec un coefficient de diffusivité locale $d_i = \mathcal{D}(x_i) / \Delta x^2$.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{n}, t) = \sum_i d_i \left\{ (n_i + 1) (P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i+1}, t) + P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i-1}, t)) - 2n_i P(\mathbf{n}, t) \right\},$$

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- **Équation maîtresse**
- Équation de Fokker-Planck

Équation maîtresse

Grâce à la linéarité du système, on aboutit à l'équation maîtresse

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \sum_i d_i (n_i + 1) P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i+1}, t) + P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i-1}, t) - 2n_i P(\mathbf{n}, t) + (n_i + 1)\sigma_i P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^+, t) + \lambda'_i + (n_i - 1)\mu_i P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^-, t) - \lambda'_i + n_i(\sigma_i + \mu_i) P(\mathbf{n}, t),$$

Un système d'équations couplées bien complexes... mais avec la transformation de Poisson

$$P(\mathbf{n}, t) = \prod_i \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-a_i} a_i^n}{n!} f(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a},$$

on simplifie les choses.

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- **Équation de Fokker-Planck**

Équation de Fokker-Planck

Dans le a -espace, on a l'équation équivalente, qui est une équation de type FP

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{a}, t) = \sum_i \mu_i \frac{\partial^2 a_i f}{\partial a_i^2} + \frac{\partial}{\partial a_i} \{ [d_i(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i) + \lambda'_i - a_i \kappa_i] f \}.$$

avec $\kappa_i = \sigma_i - \mu_i$. Cette équation est aussi équivalente à un système d'équations de Langevin

$$da_i(t) = (d_i(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i) - \lambda'_i - a_i(\sigma_i - \mu_i)) dt + \sqrt{2\mu_i a_i} dW_i(t),$$

Dans la limite $\Delta x \rightarrow 0$ et introduisant la fonction $b(x, t)$ telle que $b(x_i, t) = a_i$, on obtient une EAD linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} b(x, t) = D_u \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \bar{u}_s \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda'(x, t) - \kappa(x, t)b + \sqrt{2\mu b} \xi_b,$$

Forces et faiblesse du modèle

Quelques limitations de l'approche actuelle (analytique)

- couplage fort : la phase solide est gouvernée par la phase fluide
- modèle unidirectionnel
- particules identiques et sphériques : pas de tri granulométrique, de pavage, etc.
- un modèle qui ne marche pas pour toutes les valeurs de $\zeta = \bar{u}_s / \sqrt{D_u / t_r}$: il faut que $\zeta > 2$ pour que l'approximation de diffusion locale soit valide

À retenir

Quelques résultats importants

- une équation d'advection linéaire (EAD) avec un terme source pour $\langle \gamma \rangle$
- si on définit le débit solide macroscopique

$$Q(x, t) = \langle \gamma \rangle \bar{u}_s - \frac{\partial}{\partial x} (D_u \langle \gamma \rangle),$$

alors il y a équivalence entre l'équation d'Exner et l'EAD

- bruit coloré (bruit multiplicatif): instabilité de Turing ?
- importance du paramètre d'entraînement collectif μ : fluctuations poissoniennes si $\mu = 0$, non-poissonienne si $\mu > 0$ (comportement plus complexe avec apparition de longueur et de temps de corrélation)
- implémentation numérique possible grâce à l'équivalence entre équations stochastiques et de Fokker-Planck.

Un travail de longue haleine

- travail commencé au Cemagref (IRSTEA) au début des années 2000 : Philippe Frey, Tobias Böhm, Françoise Bigillon, Nathalie Jodeau
- apport du prof. Anthony Davison (EPFL)
- collaboration avec Eric Bardou (CREALP) et prof. Patricio Bohorquez (université de Jaén)
- contribution de Joris Heyman
- financement : FNS et État du Valais

Références

- *Ancey et al., Phys. Rev. E* **66** (2002) 036306 ; *Phys. Rev. E* **67** (2003) 011303 ; *Phys. Rev. E* **74** (2006) 011302.
- *Ancey J. Geophys. Res.* **115** (2010) F00A11.
- *Ancey et al. J. Fluid Mech.* **595** (2008) 83–114 ; Ancey & Heyman article soumis à *J. Fluid Mech.* (2013).
- *Heyman et al., Geophys. Res. Lett.*, **40**, 128–133, 2013.
- *Böhm et al. Exp. Fluids*, **41** (2006) 1-11 ; *Phys. Rev. E* **69** (2004) 061307.