

Transport de sédiment : approche stochastique

Christophe Ancey & Joris Heyman

11 septembre 2013

Plan de l'exposé

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

- Motivation : quel rôle pour les fluctuations de q_s ?
- Modèle markovien de mort/naissance
- Généralisation à un écoulement 1D
- Observations expérimentales

Introduction

● Fluctuations dans les rivières

- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

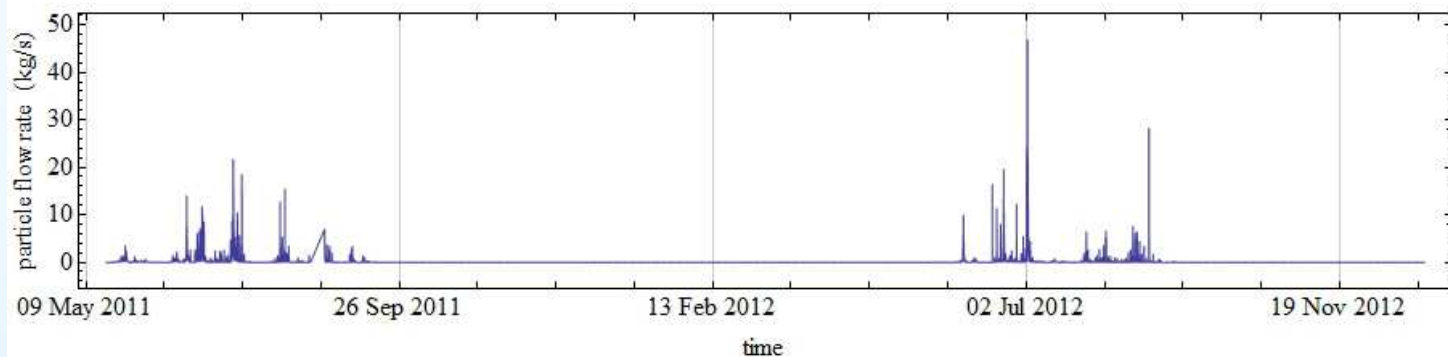
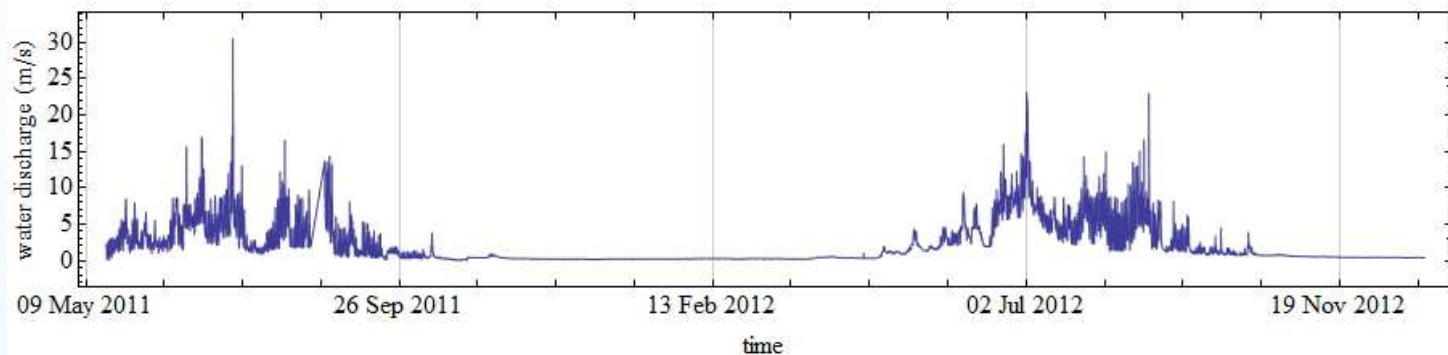
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Fluctuations dans les rivières



Mesures *in situ* sur la Navisence (Valais, CH), pente 2 % (mesure par géophones)

Courtoisie du CREALP (Dr Eric Bardou)

Introduction

- **Fluctuations dans les rivières**
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

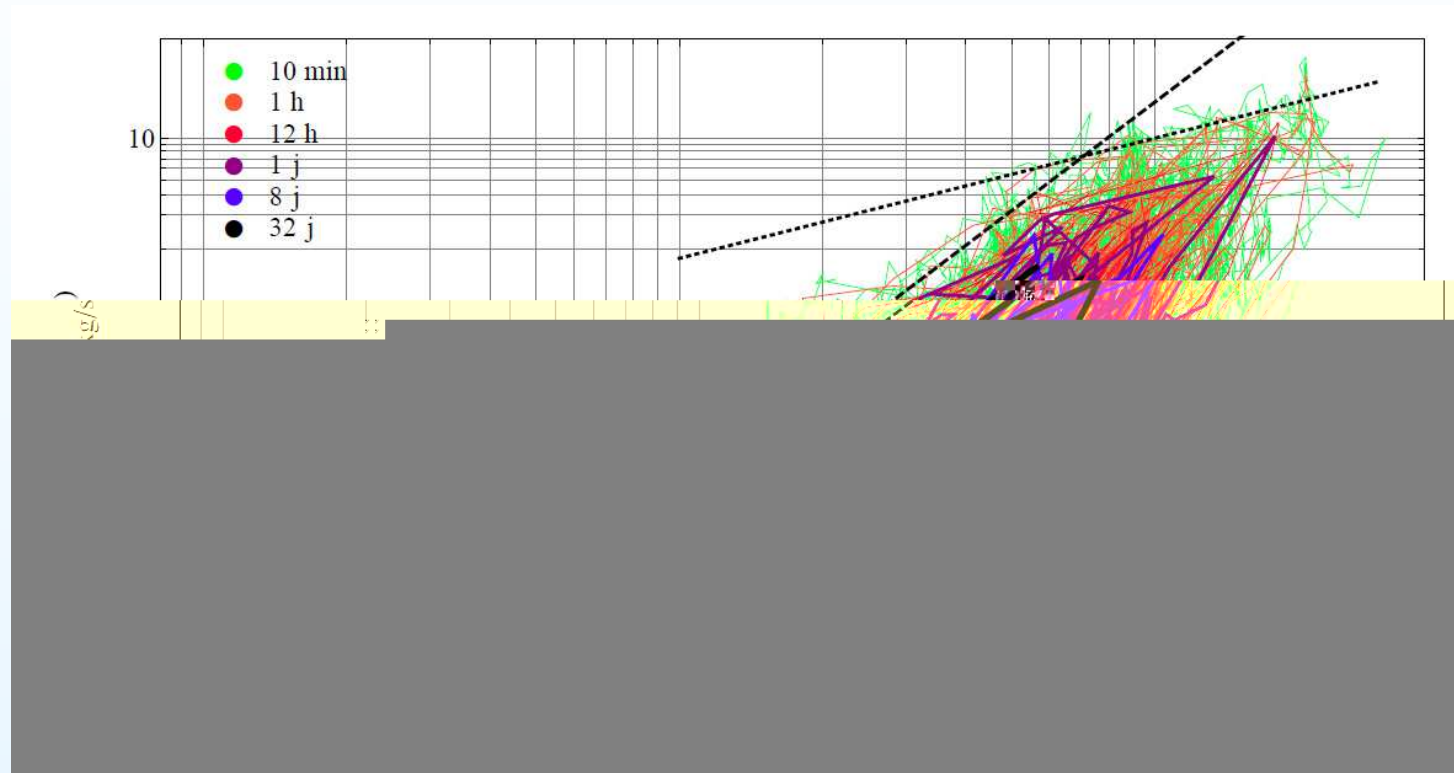
Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Analyse de la relation entre Q_s et Q_l selon le pas de temps considéré pour la moyenne

La droite en tiretés représente la courbe de tendance $Q_s \propto Q_l^3$ tandis que la droite en pointillés représente la courbe de tendance linéaire $Q_s \propto Q_l$.

Expériences en laboratoire

Introduction

- Fluctuations dans les rivières

- **Expériences en laboratoire**

- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

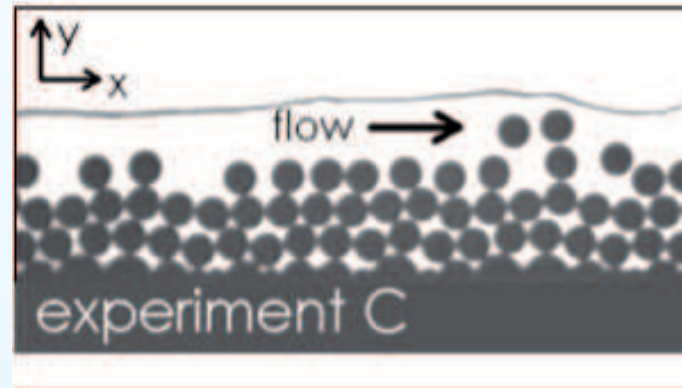
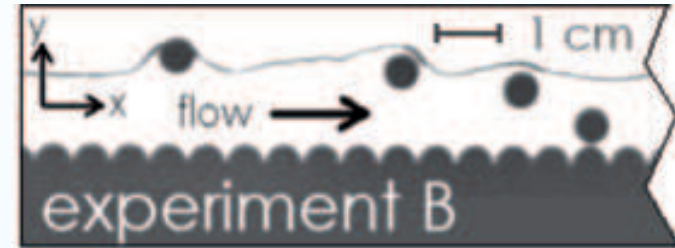
Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Expérience A : lit plat bed. Expérience B : lit avec rugosité.
Expérience C : lit mobile.

Introduction

- Fluctuations dans les rivières

- Expériences en laboratoire

- Quelques déductions

- Modèles morphodynamiques

- Quelle forme pour Exner ?

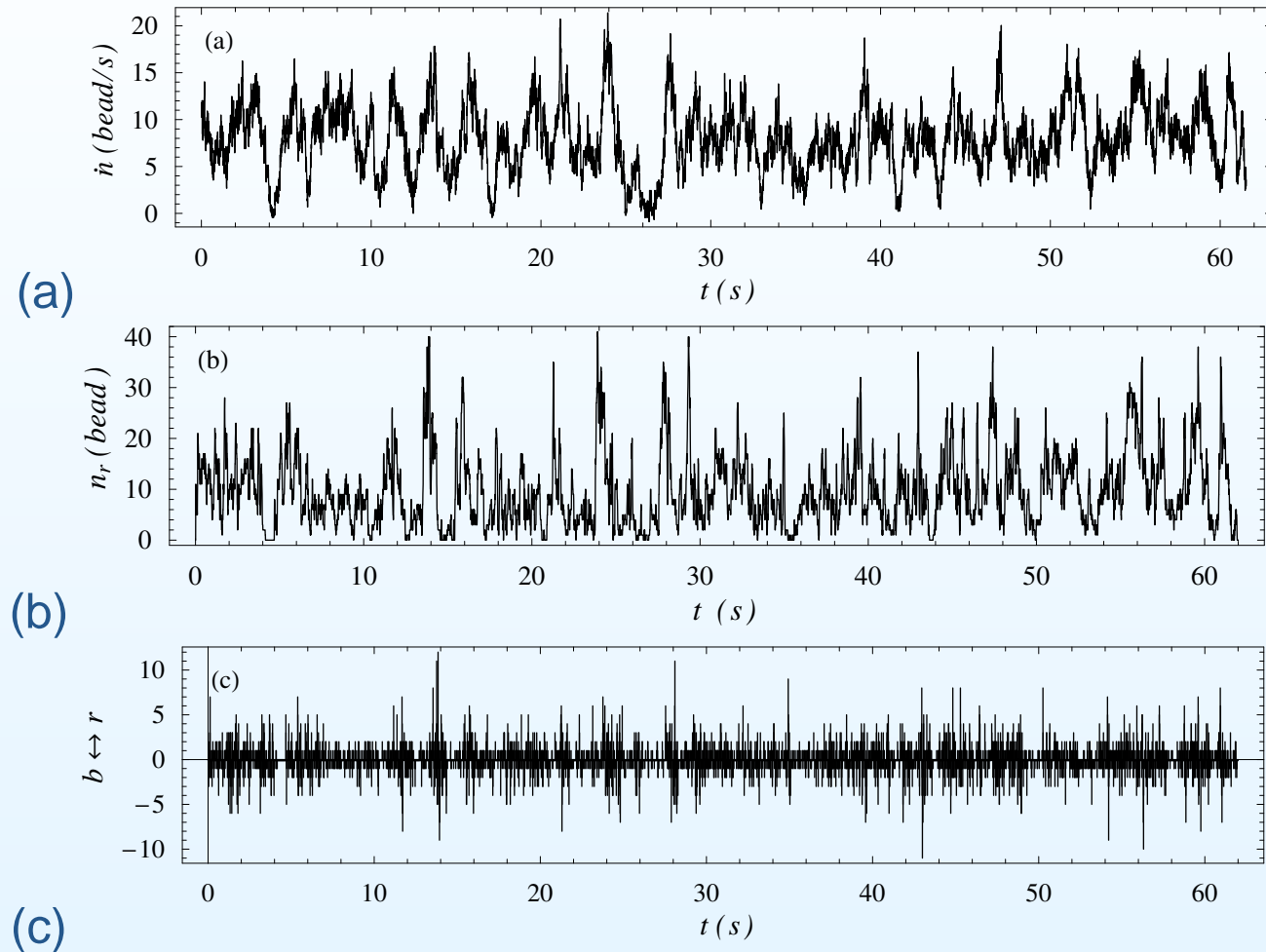
Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Séries temporelles : (a) débit solide, (b) nombre de billes en roulement, (c) érosion et déposition

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- **Quelques déductions**
- Modèles morphodynamiques
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

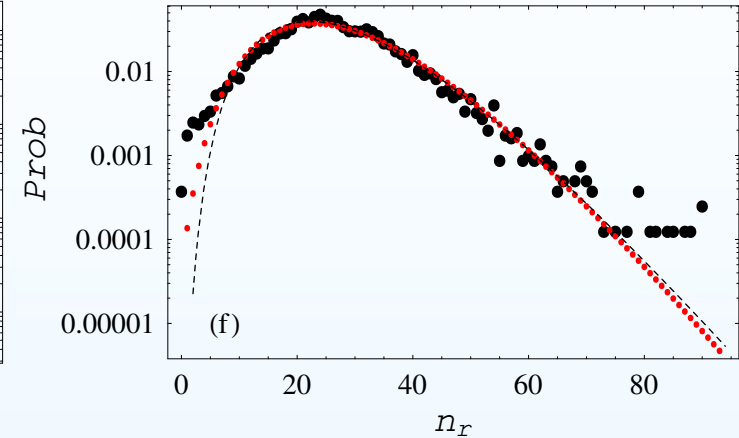
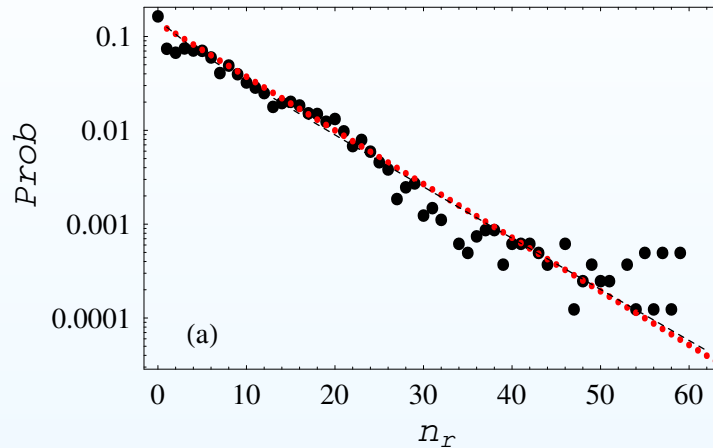
Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Quelques déductions



distribution de probabilité (ddp) du nombre de particules (à faible et fort débits liquides) → loi binomiale négative plutôt qu'une distribution binomiale (théorie d'Einstein)

- variance > moyenne → grandes fluctuations
- temps d'auto-corrélation long

→ Est-ce que cela joue un rôle à l'échelle macroscopique ?

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- **Modèles morphodynamiques**
- Quelle forme pour Exner ?

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Modèles morphodynamiques

Équations de Saint-Venant + Exner

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial x} + gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho}, \quad (2)$$

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial y_b}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} = D - E, \quad (3)$$

Couplage non linéaire entre θ , y_b , \bar{q}_s , et τ_b

Analyse de stabilité linéaire : inconditionnellement stable (voir

Charru 2011, Balmforth & Provenzalle 2001)

\bar{q}_s : débit solide moyen par unité de largeur [m^2/s], \bar{v} vitesse moyenne de l'eau, h hauteur d'eau, E et D taux d'érosion et de déposition, y_b côte du lit, ζ_b porosité du lit, $\tan \theta = \partial_x y_b$ pente locale du lit, ρ masse volumique de l'eau, τ_b résistance à l'écoulement

Introduction

- Fluctuations dans les rivières
- Expériences en laboratoire
- Quelques déductions
- Modèles morphodynamiques
- **Quelle forme pour Exner ?**

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Quelle forme pour Exner ?

- Jerolmack & Mohrig (WRR 2005)

$$(1 - \zeta_b) \frac{\partial y_b}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} + \xi,$$

ξ bruit blanc

- Furbish et al. (JGR 2012)

$$\bar{q}_s = \overline{u_s \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\kappa \gamma}}{\partial x}$$

κ diffusivité des particules, γ activité particulaire (nb de particules en mouvement par unité de surface)

- Lajeunesse et al. (JGR 2010)

$$\ell_{sat} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x} = q_{sat} - \bar{q}_s$$

ℓ_{sat} longueur de saturation, q_{sat} débit de saturation

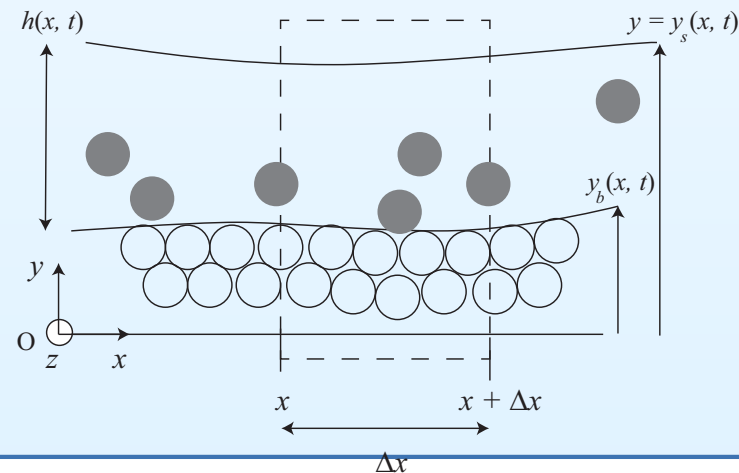
● Principes du modèle

- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Principes du modèle

Le développement du modèle a été guidé par quelques principes :

- tirer profit des outils mathématiques en cinétique chimique et dynamique des populations : processus de Markov, marche aléatoire à temps continu, équation maîtresse. Les échanges entre le lit et le courant sont traités comme des réactions chimiques ;
- développer un modèle avec un minimum de paramètres, si possible mesurables indépendamment ;
- faire le lien entre une description microscopique (à l'échelle des particules) et le comportement macroscopique ;
- description eulérienne sur un volume de contrôle ;
- simplifier le problème au maximum (particules sphériques de même taille, couplage maître/esclave fluide/particules, etc.)



- Principes du modèle
- **Comment définir le débit solide ?**
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Comment définir le débit solide ?

Une définition naturelle : un flux de particules à travers une surface de contrôle

$$q_s = \int_S \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{k} dS, \quad (4)$$

difficile à appliquer pour des particules (discrètes). Une définition probabiliste

$$\langle q_s \rangle = \int_S \int_{\mathbb{R}^2} P[\mathbf{u}_p \mid \mathbf{x}, t] \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{k} |d\mathbf{x}| d\mathbf{u}_p.$$

D'autres formes

- équilibre entre déposition et érosion (Einstein) : $q_s = El_s$;
- définition à partir du mouvement de « traceurs » (Ferguson, Wong & Parker) : $q_s = U_p L_a$;
- définition à partir de la trajectoire des particules (Furbish et al.) : $\bar{q}_s = \overline{u_s \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\kappa \gamma}}{\partial x}$;
- d'autres définitions encore (Wiberg, Ballio & Nikora, etc.).

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?

- **Notre définition du débit solide**

- Éléments du modèle
- Formulation markovienne

- Solution en régime permanent

- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Notre définition du débit solide

Une définition locale (débit volumique par unité de largeur)

$$q_s(x, t; \mathcal{V}; \bar{v}, h) = N \frac{\varpi_p}{\Delta x} \mathcal{U}_n = \gamma \mathcal{U}_n = \frac{\varpi_p}{\Delta x} \sum_{i=1}^N u_{p,i},$$

ou bien (débit = nombre de particules par unité de temps)

$$\dot{n} = \frac{N}{\Delta x} \mathcal{U}_n$$

- N nombre de particules en mouvement dans le volume de contrôle ;
- $\gamma = N\varpi_p/\Delta x$: « activité particulaire » (Furbish) ;
- $\varpi_p = 4\pi d^3/(24B)$ volume d'une particule par unité de largeur du lit (écoulement 1D) ;
- $\mathcal{U}_n = \sum_{i=1}^N u_{p,i}/N$ moyenne arithmétique de la vitesse.

Deux variables clés : la vitesse moyenne des particules et le nombre de particules en mouvement.

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- **Éléments du modèle**
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

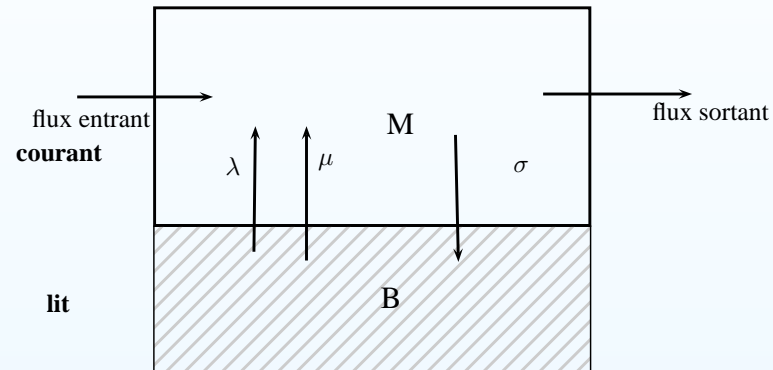
Généralisation

Conclusions

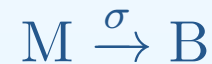
Remerciements

Éléments du modèle

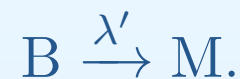
Faire un bilan de l'évolution des particules sur un volume de contrôle



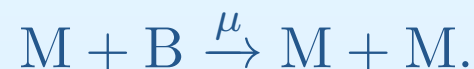
Déposition de particules



Entraînement d'une particule par le courant



Entraînement par effect collectif



- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- **Formulation markovienne**
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Formulation markovienne

Pour l'entraînement

$$P(n \rightarrow n+1, \Delta t) = \lambda' \Delta t + o(\Delta t), \quad P(n \rightarrow n+1, \Delta t) = \mu n \Delta t + o(\Delta t)$$

Pour la déposition

$$P(n \rightarrow n-1, \Delta t) = n \sigma \Delta t + o(\Delta t).$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov pour des variables discrètes

$$P(n, t + \Delta t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P(n+i, t) P(n+i \rightarrow n, \Delta t),$$

permet d'obtenir l'équation maîtresse dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n, t) &= (n+1)\sigma P(n+1, t) + (\lambda' + (n-1)\mu) P(n-1, t) \\ &\quad - (\lambda' + n(\sigma + \mu)) P(n, t), \end{aligned}$$

Introduction

Modèle à une cellule

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide

- Éléments du modèle
- Formulation markovienne

● **Solution en régime permanent**

- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Transformée de Poisson

Généralisation

Conclusions

Remerciements

Solution en régime permanent

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n; t),$$

permet de transformer l'équation maîtresse en « simple » EDP hyperbolique

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) = L_z[G]$$

avec l'opérateur linéaire

$$L_z[G] = \lambda'(z - 1) + \{ \sigma + \mu z^2 - (\mu + \sigma)z \} \frac{\partial}{\partial z} G.$$

Une équation que l'on peut résoudre à la main

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide

● Éléments du modèle

- Formulation markovienne

● Solution en régime permanent

● **Solution pour $\mu > 0$**

● Solution pour $\mu = 0$

● Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Solution pour $\mu > 0$

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t \mid N_0 = n) = \left(\frac{\sigma - \mu}{(C\mu - \mu)z + \sigma - C\mu} \right)^{n + \lambda'/\mu} \left(\frac{(C\sigma - \mu)z + \sigma(1 - C)}{\sigma - \mu} \right)^n$$

C'est la fonction génératrice de la *distribution binomiale négative*

$$P_s(n) = \text{NegBin}(n; r_{nb}, p) = \frac{\Gamma(r_{nb})}{\Gamma(r_{nb} - n) n!} p^{r_{nb}} (1 - p)^n, n = 0, 1, \dots,$$

avec $r_{nb} = \lambda'/\mu$ and $p = 1 - \mu/\sigma$, et Γ la fonction gamma. La moyenne est

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda'}{\sigma - \mu},$$

et la variance vaut

$$\text{var } N = \frac{\lambda' \sigma}{(\sigma - \mu)^2}.$$

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- **Solution pour $\mu = 0$**
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Solution pour $\mu = 0$

La fonction génératrice des probabilités

$$G(z, t \mid N_0 = n) = [1 - C(1 - z)]^n \exp \left[\frac{\lambda'}{\sigma} (z - 1 + C(1 - z)) \right]$$

C'est la fonction génératrice de la *distribution de Poisson*

$$P_s(n) = \frac{(r_p)^n}{n!} e^{-r_p}, \quad n = 0, 1, \dots$$

avec $r_p = \lambda' / \sigma$. La moyenne et la variance sont égales (à r_p).

On retrouve le modèle d'Einstein : chaque particule a un mouvement sporadique décrit par un processus de Bernoulli. La somme de N processus de Bernoulli est un processus binomial. La loi binomiale tend vers la loi de Poisson quand $n \rightarrow \infty$ tout en gardant np constant.

- Principes du modèle
- Comment définir le débit solide ?
- Notre définition du débit solide
- Éléments du modèle
- Formulation markovienne
- Solution en régime permanent
- Solution pour $\mu > 0$
- Solution pour $\mu = 0$
- Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

Lien entre les solutions $\mu > 0$ et $\mu = 0$

La loi binomiale négative est une loi de Poisson dont le taux serait aléatoire et distribué selon une loi gamma

$$P_s(n) = \int_a \frac{e^{-a} a^n}{n!} \text{Ga}(a; \alpha, \beta) da$$

$$= \text{NegBin}(n, r_{nb}, p) \quad (5)$$

$$= \frac{\Gamma[r_{nb} + n]}{\Gamma[r_{nb}]} p^{r_{nb}} (1 - p)^n \quad (6)$$

avec $\alpha = r_{nb} = \lambda' / \mu$ et $\beta = 1/p - 1 = \mu / (\sigma - \mu)$

Représentation de Poisson...

$$P(n, t) = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-a} a^n}{n!} f(a, t) da,$$

ou comment passer de variables discrètes à des variables continues



Représentation de Poisson

On montre (avec un peu de math) que l'on peut passer de l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial t} = L_z[G] \text{ avec } G(z, t) = \{K(z, a), f(a, t)\},$$

avec $K(z, a) = \exp[a(z - 1)]$ la fonction « noyau » de Laplace, à une équation parabolique non linéaire du second ordre

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 a f}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a} [(\lambda' - a(\sigma - \mu)) f].$$

Avantages :

- une équation que l'on peut interpréter comme une équation de Fokker-Planck ;
- une équation bien connue des mathématiciens (processus de Feller, 1950)...
- comme des économistes (modèle CIR, Cox-Irgensoll-Ross, des taux d'intérêt, 1985).

- Représentation de Poisson
- **Passage à l'équation de Langevin**
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Passage à l'équation de Langevin

L'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \underbrace{[(\lambda' - a(\sigma - \mu))f]}_{A(a)} + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \underbrace{(\mu a f)}_{\frac{1}{2}D(a)}.$$

peut s'interpréter aussi comme une équation différentielle stochastique (Langevin)

$$da = A dt + \sqrt{D} dW(t) = (\lambda' - a(\sigma - \mu))dt + \sqrt{2\mu a} \xi(t) dt,$$

avec $\xi = dW(t)/dt$ représentant les incréments d'un processus de Wiener $W(t)$ (bruit blanc) satisfaisant $\langle \xi(t) \rangle = 0$ et $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$.

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Intérêts de l'équation de Langevin

On obtient des solutions analytiques

$$a(t) = a_\infty + (a_0 - a_\infty) e^{-\kappa t} + \sqrt{2\mu} e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa t'} \sqrt{a(t')} dW(t'),$$

avec $\kappa = \sigma - \mu$, soit en moyenne

$$\langle a(t) \rangle = a_\infty + (a_0 - a_\infty) e^{-\kappa t} \text{ avec } a_\infty = \langle a \rangle_s = \lambda' / (\sigma - \mu)$$

La fonction d'autocorrélation est

$$C(\tau) = \frac{\text{cov}((a(s), a(s + \tau)))}{\text{var } a(s)} = e^{-\tau/t_c}$$

C'est une équation assez simple à simuler numériquement (voir lacus 2008).

Fluctuations de vitesse

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- **Fluctuations de vitesse**

Introduction

Modèle à une cellule

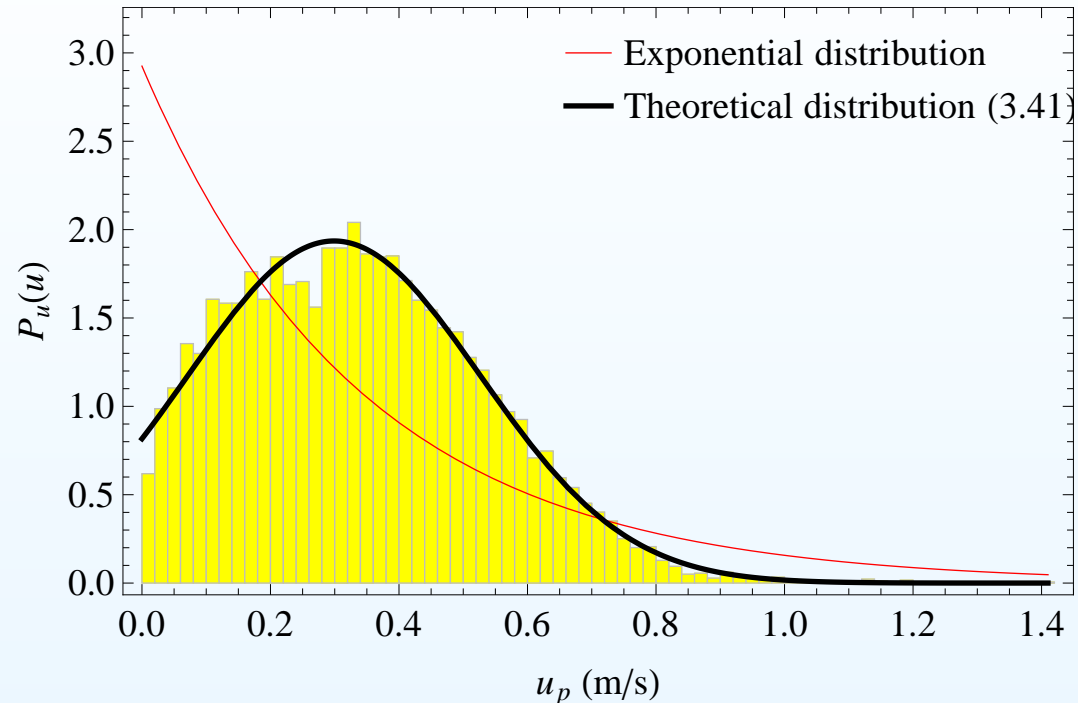
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- **Fluctuations de vitesse**
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densité de probabilité pour la vitesse d'une particule. Histogramme : densité de probabilité empirique de u_p . Courbe en gras : distribution théorique avec $\bar{u}_s = 29,9 \text{ cm s}^{-1}$ et $\zeta = 5,7$. Courbe fine : densité de probabilité de la loi exponentielle $P_u(u) = e^{-u/\bar{u}_s} / \bar{u}_s$, still with $\bar{u}_s = 29,9 \text{ cm s}^{-1}$. Calcul sur 755 trajectoires, pente du canal $1,6^\circ$, écoulement supercritique (Froude de 2,1) et turbulent (Reynolds voisin de 18 000).

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- **Calcul du débit**
- Comparaison avec les expériences

Calcul du débit

Par définition

$$\dot{n}(t; \mathcal{V}) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{N(t)} U_{p,i},$$

ce qui conduit à

$$P_{\dot{n}}(\dot{n}) = P_s(0)\delta(\dot{n}) + \frac{\zeta \Delta x}{\bar{u}_s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} P_s(k) \frac{\exp \left[-\zeta^2 \frac{(\dot{n} \Delta x - k \bar{u}_s)^2}{2k \bar{u}_s^2} \right]}{\sqrt{k} (1 + \operatorname{erf}(\sqrt{k} \zeta / \sqrt{2}))}.$$

Il existe des approximations pour $\zeta > 2$

$$\langle \dot{n}(t; \mathcal{V}) \rangle \approx \frac{1}{\Delta x} \langle N \rangle \langle u \rangle_{eq.} = \frac{\bar{u}_s}{\Delta x} \frac{\lambda'}{\sigma - \mu} F_{eq.}(\zeta),$$

Introduction

Modèle à une cellule

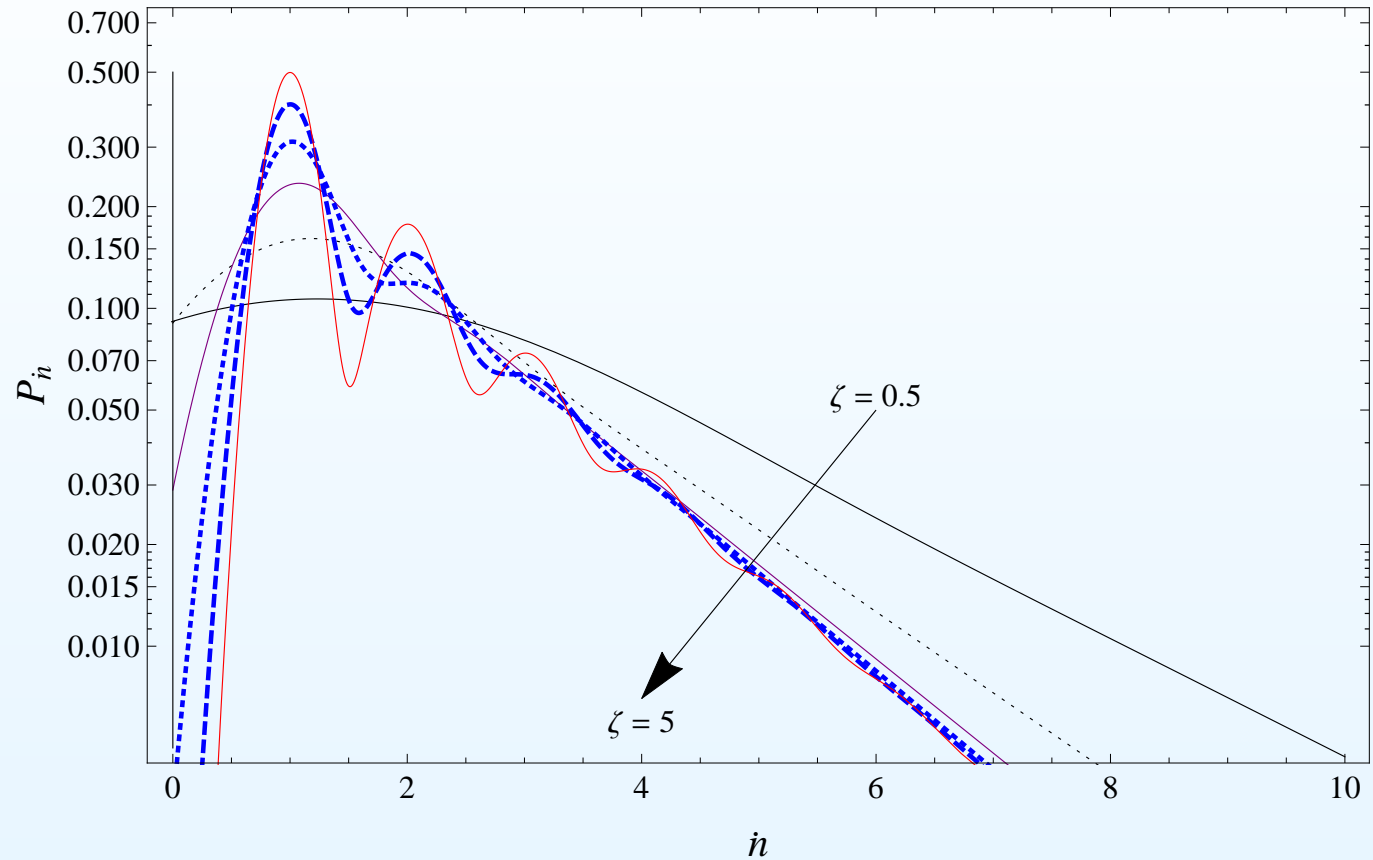
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densité de probabilité du débit solide $P_{\dot{n}}(\dot{n})$ en fonction de $\zeta = \bar{u}_s / \sqrt{D_u / t_r}$

Introduction

Modèle à une cellule

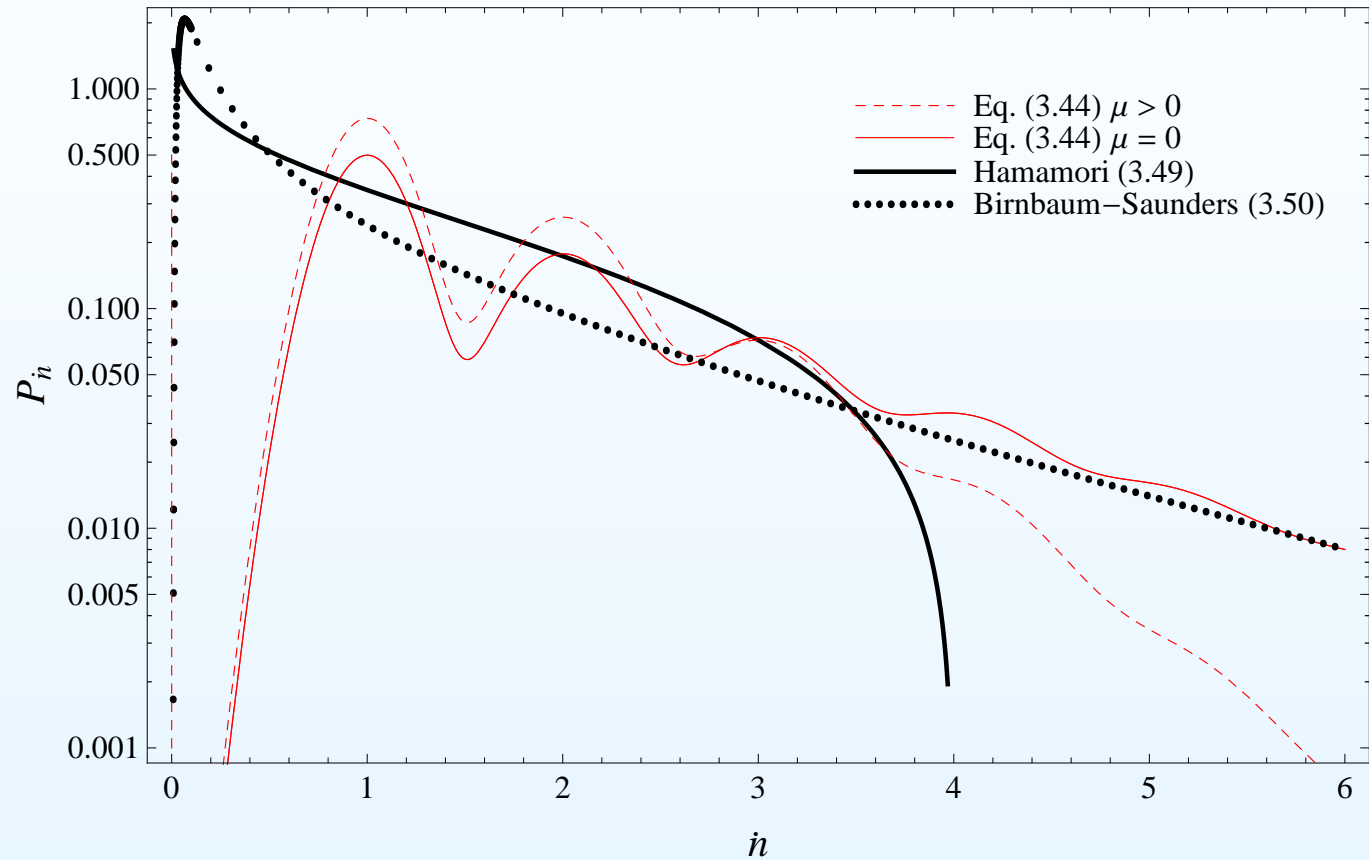
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Comparaison des densités de probabilité du débit solide $P_{\dot{n}}(\dot{n})$, notamment loi de Hamamori (1962) et Birnbaum-Saunders (Turowski WRR 2010)

Comparaison avec les expériences

Introduction

Modèle à une cellule

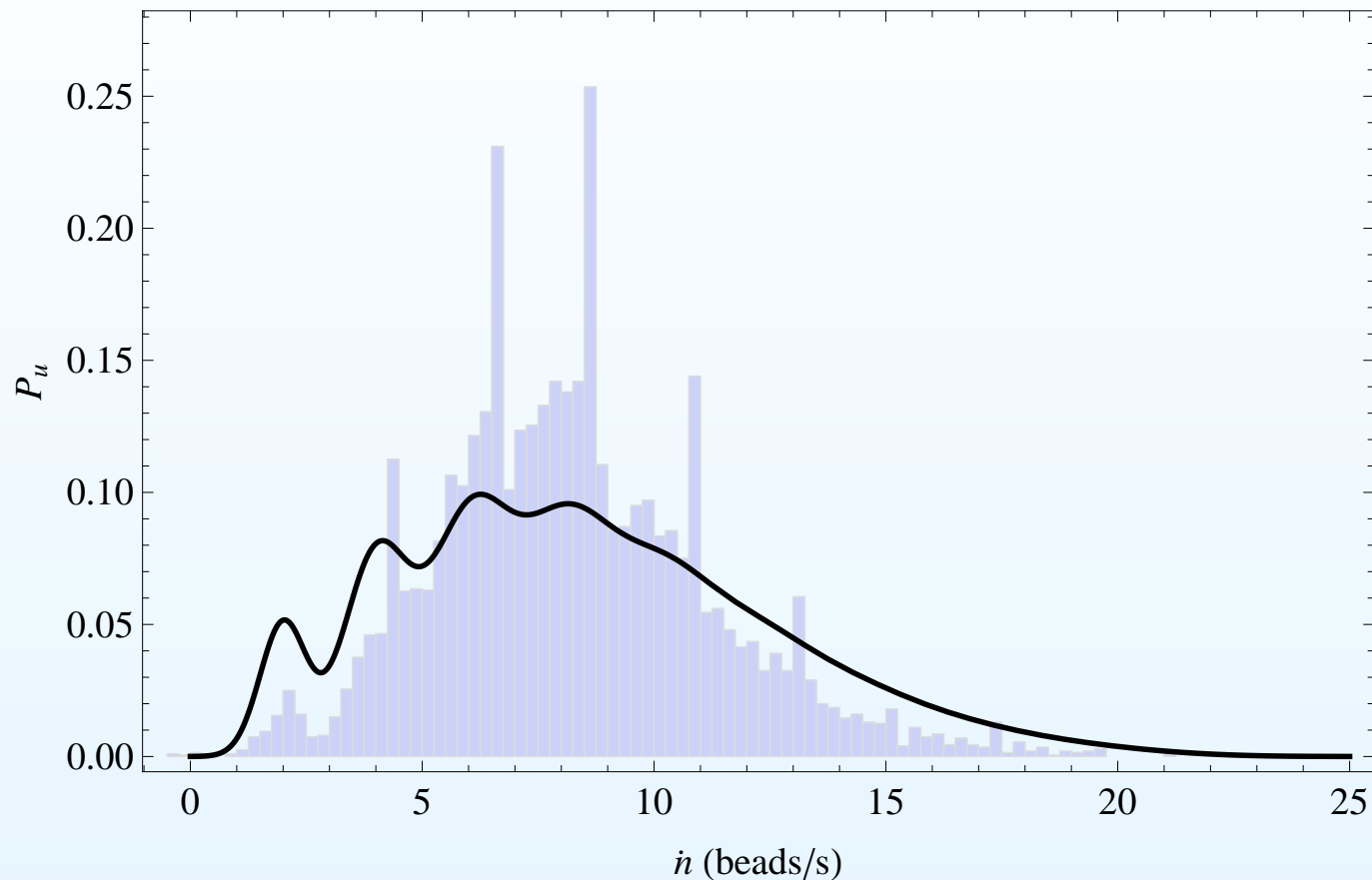
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



densité de probabilité du débit solide théorique $P_{\dot{n}}(\dot{n})$ avec $\zeta = 2,71$ et $\bar{u}_s = 44 \text{ cm s}^{-1}$ et histogramme de données expérimentales (Böhm *et al.* PRE 2004) obtenues sur un lit fixe rugueux pour une pente de 10 %

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

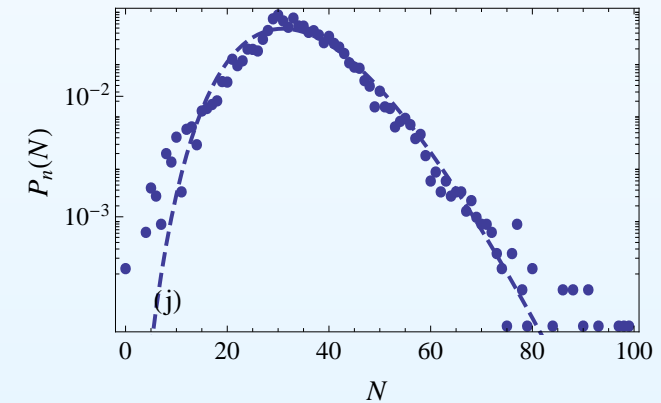
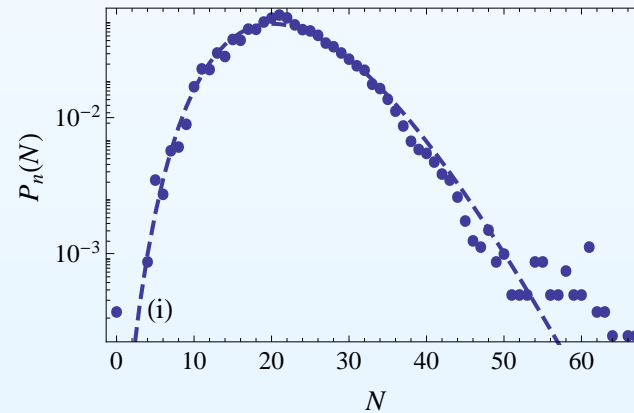
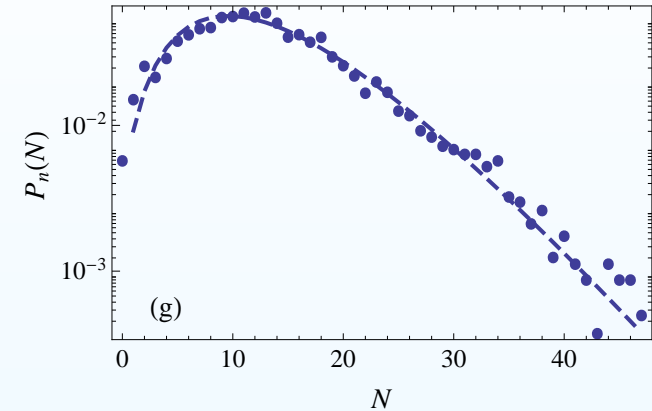
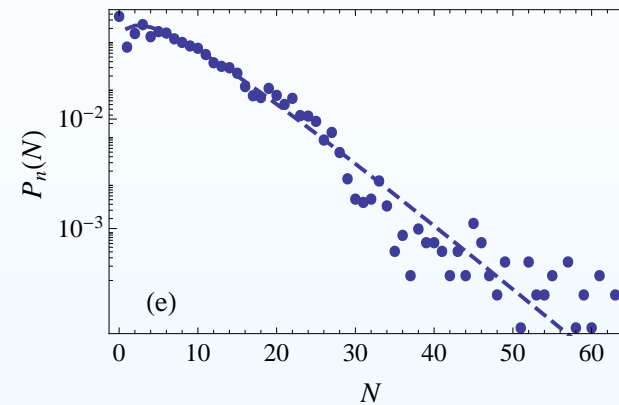
- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse

- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densités de probabilité du nombre de particules en mouvement $P_n(N)$ et comparaison avec quelques données expérimentales sur lit mobile pour une pente de 10 % (Ancy *et al.* JFM 2008). Vitesse de l'eau : (e) 41 cm s^{-1} , (g) 44 cm s^{-1} , (i) 48 cm s^{-1} , et (j) 53 cm s^{-1} .

Introduction

Modèle à une cellule

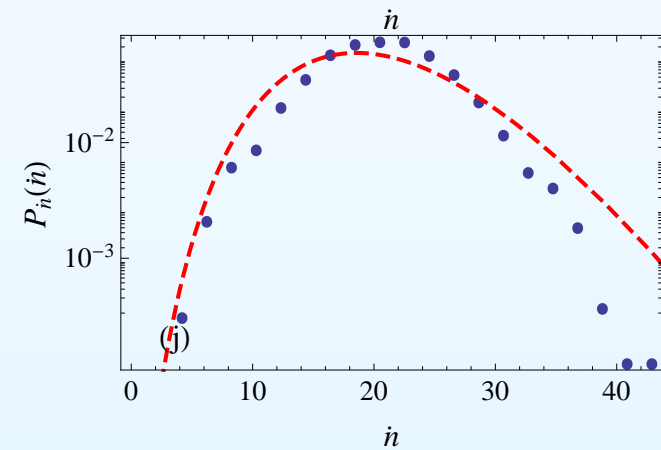
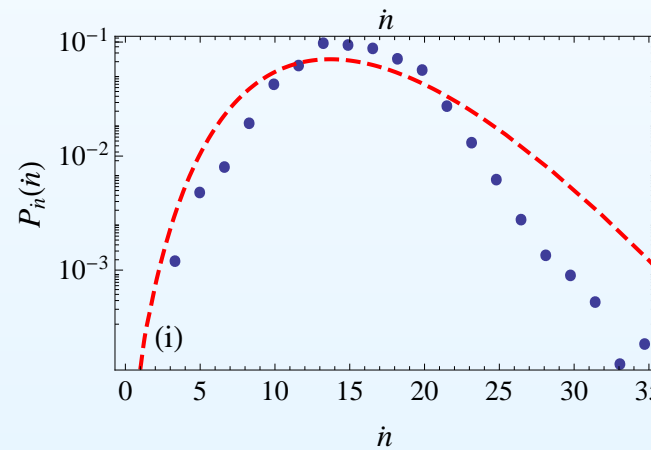
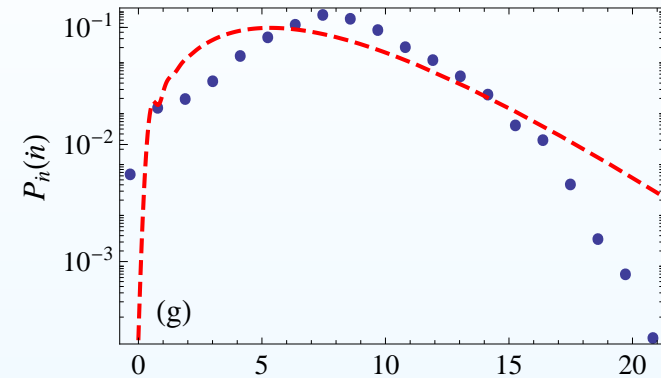
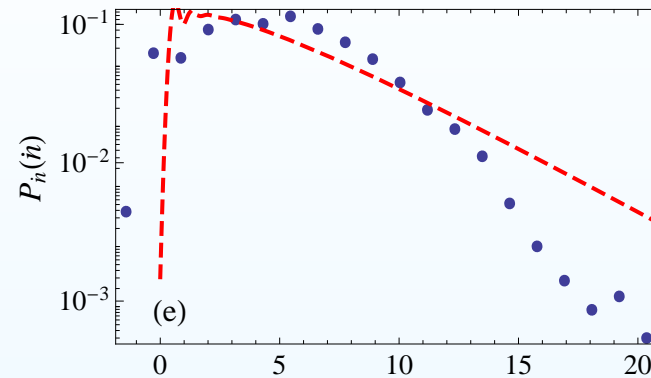
Transformée de Poisson

- Représentation de Poisson
- Passage à l'équation de Langevin
- Intérêts de l'équation de Langevin
- Fluctuations de vitesse
- Calcul du débit
- Comparaison avec les expériences

Généralisation

Conclusions

Remerciements



Densités de probabilité du débit solide $P_n(\dot{n})$ et comparaison avec quelques données expérimentales pour une pente de 10 % (Ancy et al. JFM 2008)

Équations moyennées

Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

● Équations moyennées

● Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$

● Quelques propriétés de l'équations

d'advection diffusion

● Advection-diffusion à

l'échelle locale

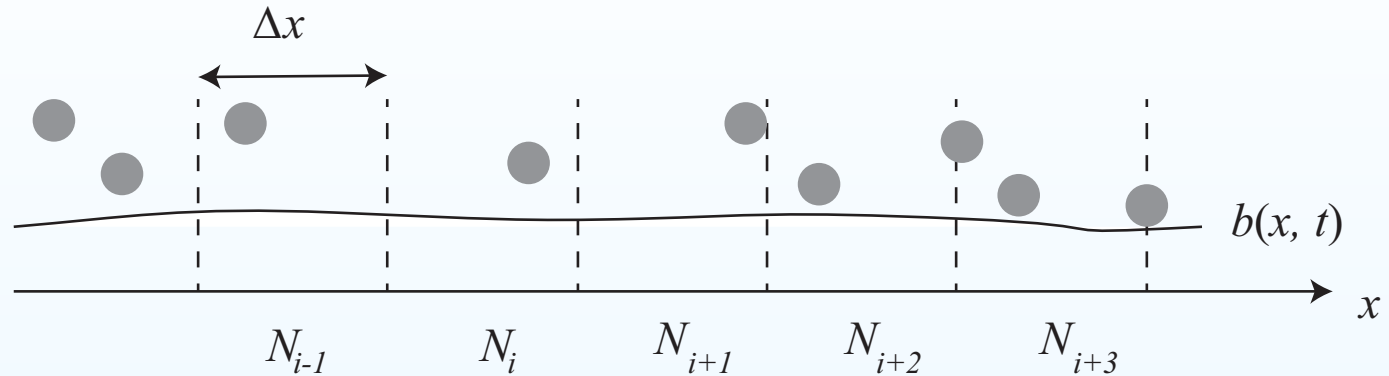
● Fluctuations stochastiques

● Équation maîtresse

● Équation de Fokker-Planck

Conclusions

Remerciements



Calcul du nombre de particules distribué dans un réseau de cellules adjacentes de même taille.

$$N(t; \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} dx P_x(x, t),$$

avec $P_x(x, t)dx$ la probabilité de trouver le centre de masse $\mathbf{x} = (x, y)$ d'une particule dans une tranche de fluide $[x, x + dx]$. Cette probabilité $P_x(x, t)$ est la densité de probabilité marginale eulérienne $P(x, u, t)$: $P_x(x, t) = \int_u P(x, u, t)du$.

Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion

Introduction

Modèle à une cellule

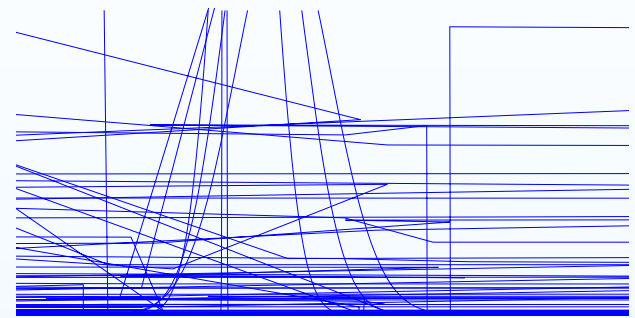
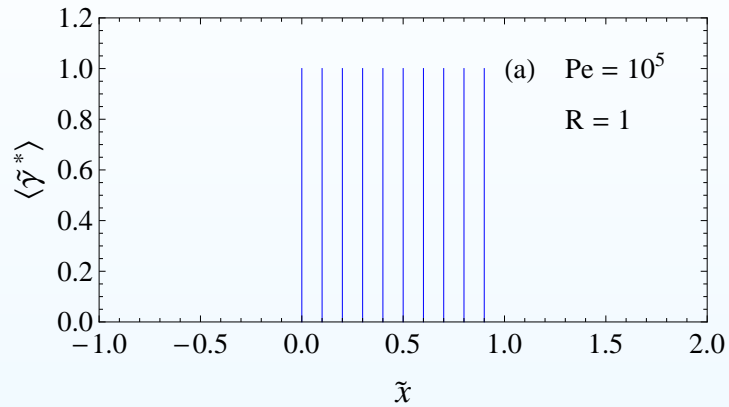
Transformée de Poisson

Généralisation

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

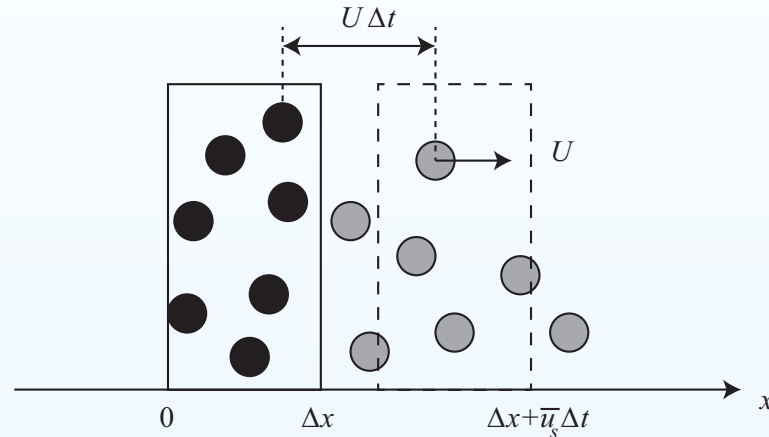
Conclusions

Remerciements

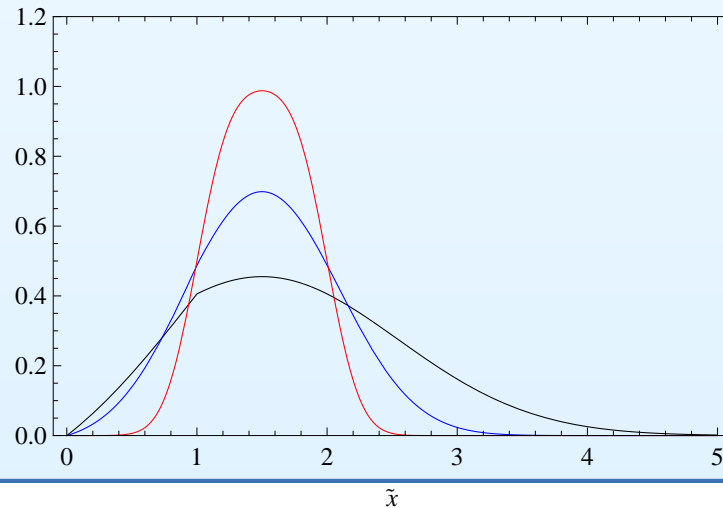


Advection-diffusion à l'échelle locale

On considère un nuage de particules, advection à la vitesse moyenne \bar{u}_s



Pour certaines valeurs de $\zeta = \bar{u}_s / \sqrt{D_u / t_r}$, le déplacement relatif x' est assimilable à de la diffusion



Introduction

Modèle à une cellule

Transformée de Poisson

Généralisation

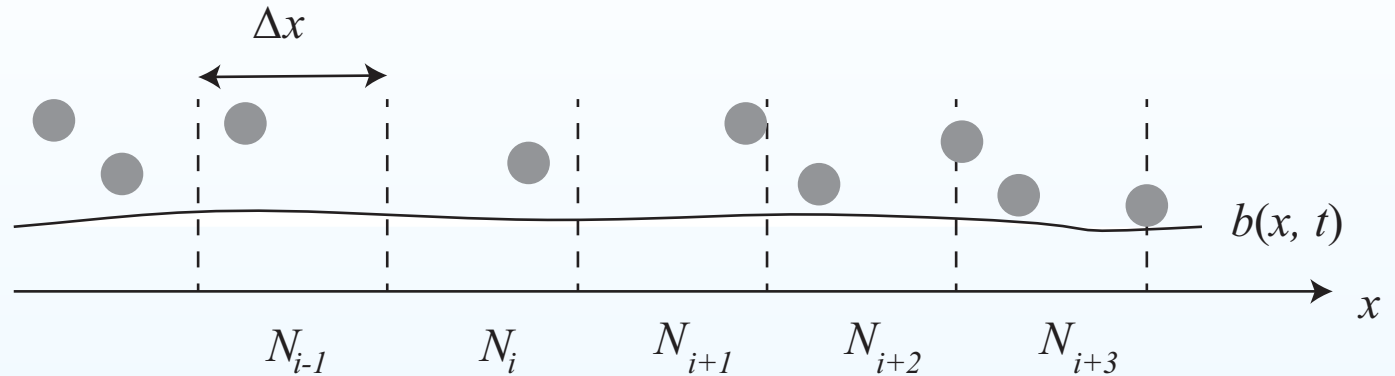
- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

Conclusions

Remerciements

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- **Fluctuations stochastiques**
- Équation maîtresse
- Équation de Fokker-Planck

Fluctuations stochastiques



Probabilité de transfert par diffusion d'une cellule à l'autre (en ignorant l'advection)

$$N_i \xrightarrow{d_i} N_{i+1} \text{ and } N_i \xrightarrow{d_i} N_{i-1},$$

avec un coefficient de diffusivité locale $d_i = \mathcal{D}(x_i) / \Delta x^2$.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{n}, t) = \sum_i d_i \left\{ (n_i + 1) (P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i+1}, t) + P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i-1}, t)) - 2n_i P(\mathbf{n}, t) \right\},$$

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- **Équation maîtresse**
- Équation de Fokker-Planck

Équation maîtresse

Grâce à la linéarité du système, on aboutit à l'équation maîtresse

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \sum_i d_i \left\{ (n_i + 1) \left(P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i+1}, t) + P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^{i-1}, t) \right) - 2n_i P(\mathbf{n}, t) \right\} + (n_i + 1)\sigma_i P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^+, t) + (\lambda'_i + (n_i - 1)\mu_i) P(\mathbf{n} + \mathbf{r}_i^-, t) - (\lambda'_i + n_i(\sigma_i + \mu_i)) P(\mathbf{n}, t),$$

Un système d'équations couplées bien complexes... mais avec la transformation de Poisson

$$P(\mathbf{n}, t) = \prod_i \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-a_i} a_i^n}{n!} f(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a},$$

on simplifie les choses.

- Équations moyennées
- Équations d'advection diffusion pour $\langle \gamma \rangle$
- Quelques propriétés de l'équations d'advection diffusion
- Advection-diffusion à l'échelle locale
- Fluctuations stochastiques
- Équation maîtresse
- **Équation de Fokker-Planck**

Équation de Fokker-Planck

Dans le a -espace, on a l'équation équivalente, qui est une équation de type FP

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{a}, t) = \sum_i \mu_i \frac{\partial^2 a_i f}{\partial a_i^2} + \frac{\partial}{\partial a_i} \{ [d_i(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i) + \lambda'_i - a_i \kappa_i] f \}.$$

avec $\kappa_i = \sigma_i - \mu_i$. Cette équation est aussi équivalente à un système d'équations de Langevin

$$da_i(t) = (d_i(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i) - \lambda'_i - a_i(\sigma_i - \mu_i)) dt + \sqrt{2\mu_i a_i} dW_i(t),$$

Dans la limite $\Delta x \rightarrow 0$ et introduisant la fonction $b(x, t)$ telle que $b(x_i, t) = a_i$, on obtient une EAD linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} b(x, t) = D_u \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \bar{u}_s \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda'(x, t) - \kappa(x, t)b + \sqrt{2\mu b} \xi_b,$$

À retenir

Quelques résultats importants

- une équation d'advection linéaire (EAD) avec un terme source pour $\langle \gamma \rangle$
- si on définit le débit solide macroscopique

$$Q(x, t) = \langle \gamma \rangle \bar{u}_s - \frac{\partial}{\partial x} (D_u \langle \gamma \rangle),$$

alors il y a équivalence entre l'équation d'Exner et l'EAD

- bruit coloré (bruit multiplicatif): instabilité de Turing ?
- importance du paramètre d'entraînement collectif μ : fluctuations poissoniennes si $\mu = 0$, non-poissonienne si $\mu > 0$ (comportement plus complexe avec apparition de longueur et de temps de corrélation)
- implémentation numérique possible grâce à l'équivalence entre équations stochastiques et de Fokker-Planck.

Un travail de longue haleine

- travail commencé au Cemagref (IRSTEA) au début des années 2000 : Philippe Frey, Tobias Böhm, Françoise Bigillon, Nathalie Jodeau
- apport du prof. Anthony Davison (EPFL)
- collaboration avec Eric Bardou (CREALP) et prof. Patricio Bohorquez (université de Jaén)
- contribution de Joris Heyman
- financement : FNS et État du Valais

Références

- *Ancey et al., Phys. Rev. E* **66** (2002) 036306 ; *Phys. Rev. E* **67** (2003) 011303 ; *Phys. Rev. E* **74** (2006) 011302.
- *Ancey J. Geophys. Res.* **115** (2010) F00A11.
- *Ancey et al. J. Fluid Mech.* **595** (2008) 83–114 ; Ancey & Heyman article soumis à *J. Fluid Mech.* (2013).
- *Heyman et al., Geophys. Res. Lett.*, **40**, 128–133, 2013.
- *Böhm et al. Exp. Fluids*, **41** (2006) 1-11 ; *Phys. Rev. E* **69** (2004) 061307.